

# Fonctions (2014)

## ◆ Exercice 1

(Nouvelle-Calédonie, mars 2014)

5 points

### Partie A

Soit  $f$  la fonction dérivable, définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln(x)$ .

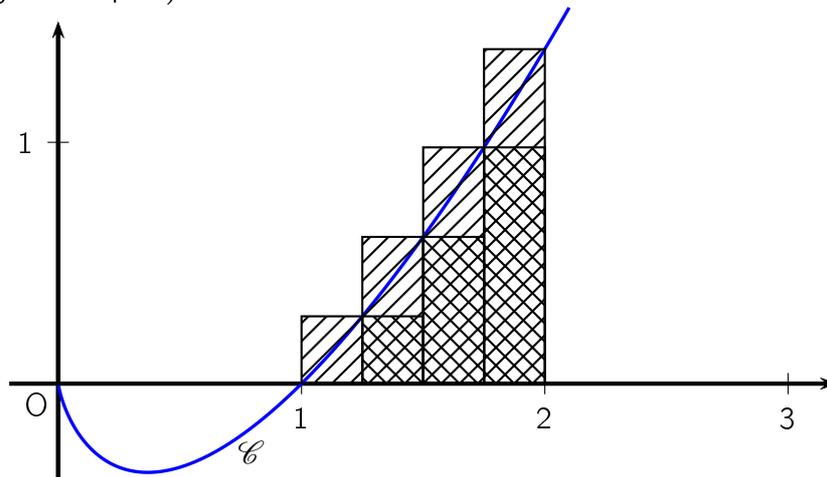
1. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. On appelle  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ . Montrer que  $f'(x) = \ln(x) + 1$ .
3. Déterminer les variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

### Partie B

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal.

Soit  $\mathcal{A}$  l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = 2$ .

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire  $\mathcal{A}$ . (voir la figure ci-après).



### Algorithme :

#### Variables

$k$  et  $n$  sont des entiers naturels

$U, V$  sont des nombres réels

#### Initialisation

$U$  prend la valeur 0

$V$  prend la valeur 0

$n$  prend la valeur 4

#### Traitement

Pour  $k$  allant de 0 à  $n - 1$

Affecter à  $U$  la valeur  $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

Affecter à  $V$  la valeur  $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

#### Affichage

Afficher  $U$

Afficher  $V$

1.
  - a. Que représentent  $U$  et  $V$  sur le graphique précédent ?
  - b. Quelles sont les valeurs  $U$  et  $V$  affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de  $U$  par défaut à  $10^{-4}$  près et une valeur approchée par excès de  $V$  à  $10^{-4}$  près) ?
  - c. En déduire un encadrement de  $\mathcal{A}$ .
2. Soient les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies pour tout entier  $n$  non nul par :

$$U_n = \frac{1}{n} \left[ f(1) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \right]$$

$$V_n = \frac{1}{n} \left[ f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) + f(2) \right].$$

On admettra que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$ .

- a. Trouver le plus petit entier  $n$  tel que  $V_n - U_n < 0,1$ .
- b. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de  $\mathcal{A}$  d'amplitude inférieure à  $0,1$  ?

### Partie C

Soit  $F$  la fonction dérivable, définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$ .

1. Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
2. Calculer la valeur exacte de  $\mathcal{A}$ .

### ◆ Exercice 2

(Pondichéry, avril 2014) **2 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

$g$  est la fonction définie sur  $\left] -\frac{1}{2} ; +\infty \right[$  par  $g(x) = 2x \ln(2x + 1)$ .

**Proposition 1** : Sur  $\left] -\frac{1}{2} ; +\infty \right[$ , l'équation  $g(x) = 2x$  a une unique solution :  $\frac{e-1}{2}$ .

**Proposition 2** : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  est  $1 + \ln 4$ .

**Partie A**

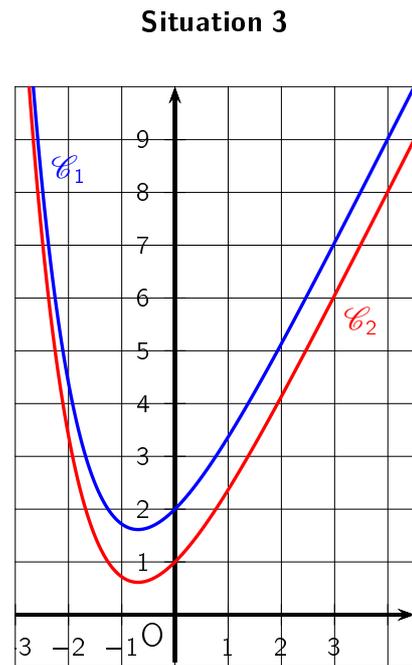
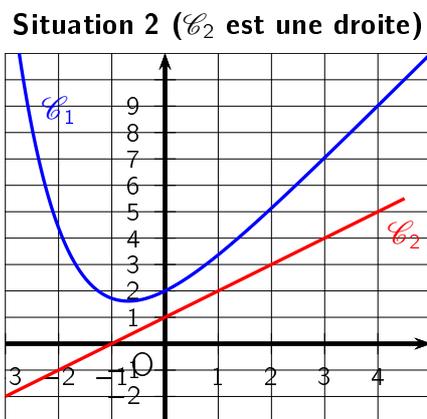
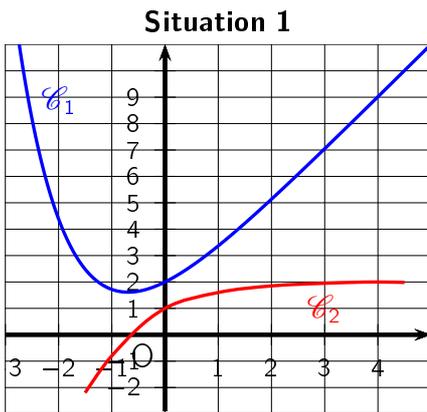
$f$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $f'$  est la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme  $\mathcal{C}_1$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\mathcal{C}_2$  la courbe représentative de la fonction  $f'$ .

Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe  $\mathcal{C}_1$ .

Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe  $\mathcal{C}_2$ .

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative  $\mathcal{C}_1$  de la fonction  $f$ . Sur l'une d'entre elles, la courbe  $\mathcal{C}_2$  de la fonction dérivée  $f'$  est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.



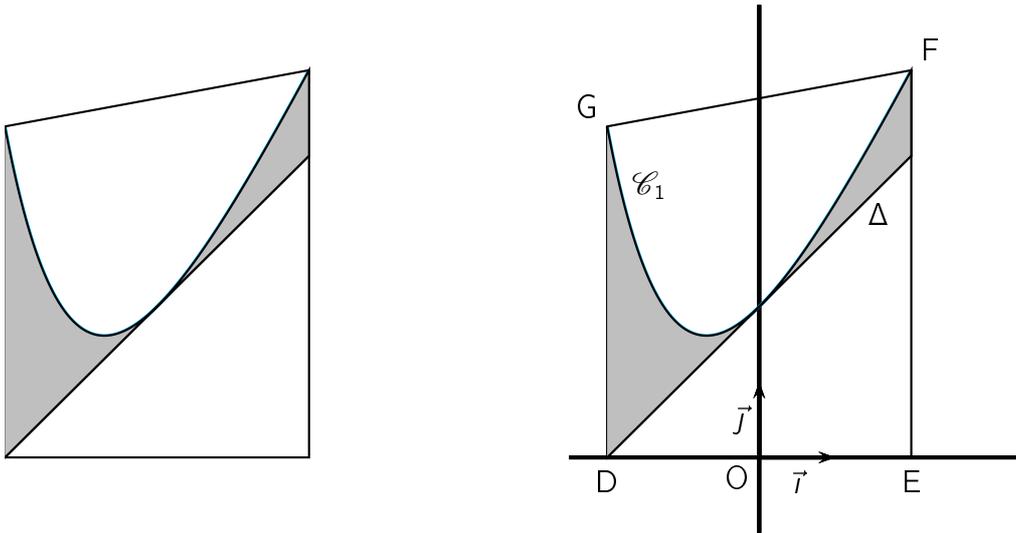
2. Déterminer l'équation réduite de la droite  $\Delta$  tangente à la courbe  $\mathcal{C}_1$  en A.
3. On sait que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^{-x} + ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.
- a. Déterminer la valeur de  $b$  en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
  - b. Prouver que  $a = 2$ .
4. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

## Partie B

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) - (x + 2)$ .

1.
  - a. Montrer que la fonction  $g$  admet 0 comme minimum sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. En déduire la position de la courbe  $\mathcal{C}_1$  par rapport à la droite  $\Delta$ .

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe  $\mathcal{C}_1$  et de la droite  $\Delta$ , comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.



Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

- D est le point de coordonnées  $(-2 ; 0)$ ,
- E est le point de coordonnées  $(2 ; 0)$ ,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe  $\mathcal{C}_1$ ,
- G est le point d'abscisse  $-2$  de la courbe  $\mathcal{C}_1$ .

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite  $\Delta$ , la courbe  $\mathcal{C}_1$ , la droite d'équation  $x = -2$  et la droite d'équation  $x = 2$ .

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à  $10^{-2}$  du résultat).

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x e^{-x}$ .  
On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal.

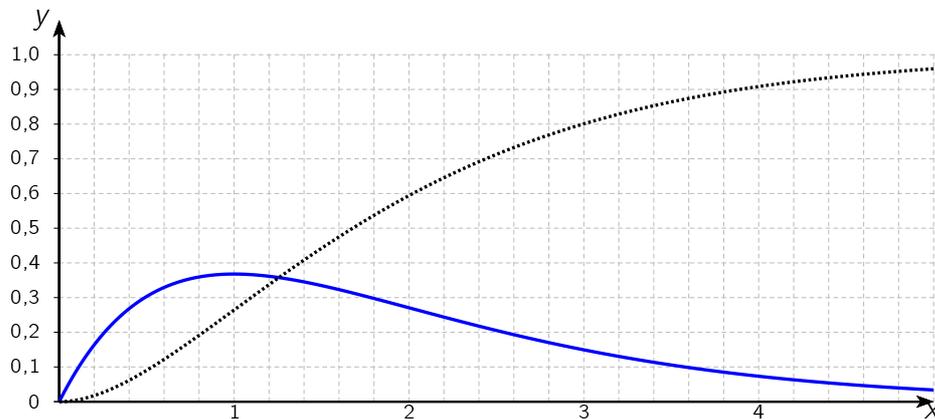
**Partie A**

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .  
Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , calculer  $f'(x)$ . En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
2. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

**Partie B**

Soit  $\mathcal{A}$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  de la façon suivante : pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $\mathcal{A}(t)$  est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = t$ .

1. Déterminer le sens de variation de la fonction  $\mathcal{A}$ .
2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}$  et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction  $\mathcal{A}$  ?
3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel  $\alpha$  tel que la droite d'équation  $x = \alpha$  partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$ , en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.
  - a. Démontrer que l'équation  $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$
  - b. Sur le graphique ci-dessous sont tracées la courbe  $\mathcal{C}$ , ainsi que la courbe  $\Gamma$  représentant la fonction  $\mathcal{A}$ .



Identifier les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$ , puis tracer la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$ . En déduire une valeur approchée du réel  $\alpha$ . Hachurer le domaine correspondant à  $\mathcal{A}(\alpha)$ .

4. On définit la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = (x + 1) e^{-x}$ .
  - a. On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .  
Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ , calculer  $g'(x)$ .
  - b. En déduire, pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ , une expression de  $\mathcal{A}(t)$ .
  - c. Calculer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $\mathcal{A}(6)$ .

**◆ Exercice 5***(Amérique du Nord, mai 2014)* **6 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  la représentation graphique de la fonction  $f$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x - 3$  dans un repère orthogonal du plan.

**Partie A : Positions relatives de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$** 

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - (x - 3)$ .

1. Justifier que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .
2. La courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\mathcal{D}$  ont-elles un point commun ? Justifier.

**Partie B : Étude de la fonction  $g$** 

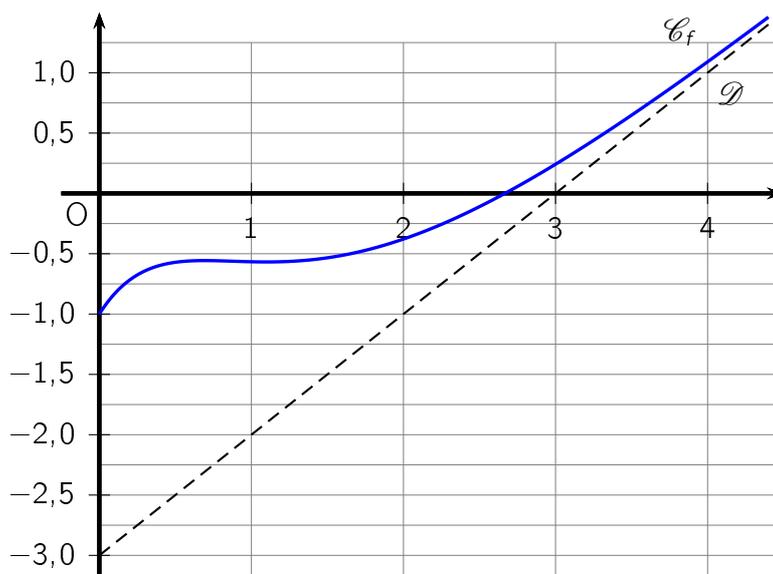
On note  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$ ,  $N$  le point d'abscisse  $x$  de la droite  $\mathcal{D}$  et on s'intéresse à l'évolution de la distance  $MN$ .

1. Justifier que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , la distance  $MN$  est égale à  $g(x)$ .
2. On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .  
Pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , calculer  $g'(x)$ .
3. Montrer que la fonction  $g$  possède un maximum sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  que l'on déterminera.  
En donner une interprétation graphique.

**Partie C : Étude d'une aire**

On considère la fonction  $\mathcal{A}$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)] dt$ .

1. Hachurer sur le graphique ci-dessous le domaine dont l'aire est donnée par  $\mathcal{A}(2)$ .



2. Justifier que la fonction  $\mathcal{A}$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
3. Pour tout réel  $x$  strictement positif, calculer  $\mathcal{A}(x)$ .
4. Existe-t-il une valeur de  $x$  telle que  $\mathcal{A}(x) = 2$  ?

**Les parties A et B sont indépendantes**

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel  $x$  de la façon suivante :

- $x = 0$  pour le blanc ;
- $x = 1$  pour le noir ;
- $x = 0,01$  ;  $x = 0,02$  et ainsi de suite jusqu'à  $x = 0,99$  par pas de  $0,01$  pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ». Une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$  ;
- $f(1) = 1$  ;
- $f$  est continue sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  ;
- $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

Une nuance codée  $x$  est dite assombrie par la fonction  $f$  si  $f(x) > x$ , et éclaircie, si  $f(x) < x$ . Ainsi, si  $f(x) = x^2$ , un pixel de nuance codée  $0,2$  prendra la nuance codée  $0,2^2 = 0,04$ . L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si  $f(x) = \sqrt{x}$ , la nuance codée  $0,2$  prendra la nuance codée  $\sqrt{0,2} \approx 0,45$ . L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

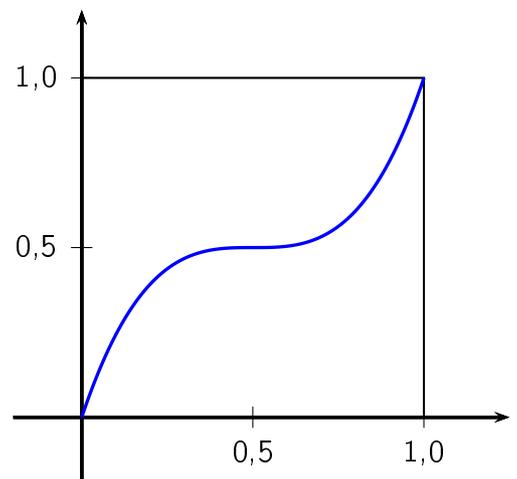
Image C

**Partie A**

1. On considère la fonction  $f_1$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$ .

- Démontrer que la fonction  $f_1$  est une fonction de retouche.
- Résoudre graphiquement l'inéquation  $f_1(x) \leq x$ , à l'aide du graphique donné ci-contre, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.



2. On considère la fonction  $f_2$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x]$ .

On admet que  $f_2$  est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle  $[0; 1]$  la fonction  $g$  par :  $g(x) = f_2(x) - x$ .

a. Établir que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  :  $g'(x) = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}$  ;

b. Déterminer les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Démontrer que la fonction  $g$  admet un maximum en  $\frac{e - 2}{e - 1}$ , maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation  $g(x) = 0,05$  admet sur l'intervalle  $[0; 1]$  deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ , avec  $\alpha < \beta$ .

On admettra que :  $0,08 < \alpha < 0,09$  et que :  $0,85 < \beta < 0,86$ .

## Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous,  $f$  désigne une fonction de retouche.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

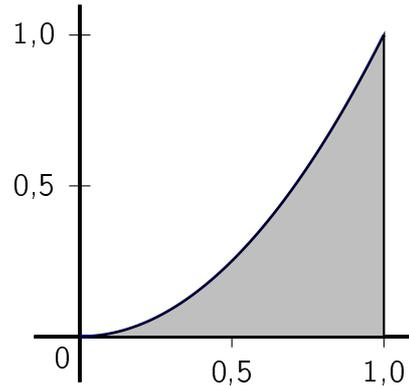
<b>Variables :</b>	$x$ (nuance initiale) $y$ (nuance retouchée) $E$ (écart) $c$ (compteur) $k$
<b>Initialisation :</b>	$c$ prend la valeur 0
<b>Traitement :</b>	Pour $k$ allant de 0 à 100, faire $x$ prend la valeur $\frac{k}{100}$ $y$ prend la valeur $f(x)$ $E$ prend la valeur $ y - x $ Si $E \geq 0,05$ , faire $c$ prend la valeur $c + 1$ Fin si Fin pour
<b>Sortie :</b>	Afficher $c$

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction  $f_2$  définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

**Partie C**

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche  $f$  dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$ ,  $f(x) \leq x$ . On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire  $\mathcal{A}_f$  de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction  $f$ , et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_1(x) = xe^{(x^2-1)} \quad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1.    **a.** Calculer  $\mathcal{A}_{f_1}$ .
- b.** Calculer  $\mathcal{A}_{f_2}$
  
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

**◆ Exercice 7** (Polynésie, juin 2014)    **5 points**

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$ . On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente  $\Delta$  dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_g$  et de la droite  $\Delta$

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$ .

- a.** Déterminer la limite de la fonction  $h$  en  $-\infty$ .
- b.** Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $h(x) = x \left( \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right)$ .  
       En déduire la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$ .
- c.** On note  $h'$  la fonction dérivée de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .  
       Pour tout réel  $x$ , calculer  $h'(x)$  et étudier le signe de  $h'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- d.** Dresser le tableau de variations de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .
- e.** En déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$ .
- f.** Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_g$  et de la droite  $\Delta$  ?
  
3. Étude de la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ 
  - a.** Pour tout réel  $x$ , développer l'expression  $\left( e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$ .
  - b.** Déterminer la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
  
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction  $g$  définie sur  $[-1 ; 1]$  par

$$g(x) = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax})$$

où  $a$  est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction  $g$ .

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel  $a$  soit une solution strictement positive de l'équation  $(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$ . Dans la suite, on définit sur  $[0 ; +\infty[$  la fonction  $f$  par  $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$  pour tout réel  $x \geq 0$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

Vérifier que  $f'(0) = -2$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ .

2. On note  $f''$  la fonction dérivée de  $f'$ .

Vérifier que, pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $f''(x) = 4xe^{2x}$ .

3. Montrer que, sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  la fonction  $f'$  s'annule pour une unique valeur, notée  $x_0$ .

4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , puis montrer que  $f(x)$  est négatif pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; x_0]$ .

b. Calculer  $f(2)$ .

En déduire que sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , la fonction  $f$  s'annule pour une unique valeur.

Si l'on note  $a$  cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de  $a$  arrondie au centième.

5. On admet sans démonstration que la longueur  $L$  de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx.$$

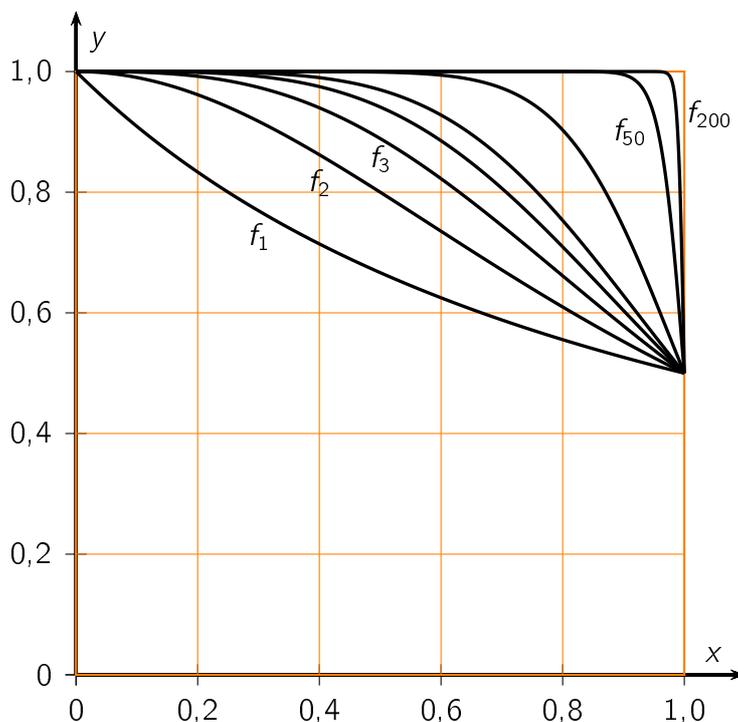
Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre  $a$ .

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  par  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit le nombre  $I_n$  par  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ .

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions  $f_n$  obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite  $(I_n)$  l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Calculer la valeur exacte de  $I_1$ .
3. a. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $I_n \leq 1$ .

4. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale  $\int_0^1 (1 - x^n) dx$ .

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	$n, p$ et $k$ sont des entiers naturels $x$ et $I$ sont des réels
<b>Initialisation :</b>	$I$ prend la valeur 0
<b>Traitement :</b>	Demander un entier $n \geq 1$ Demander un entier $p \geq 1$ Pour $k$ allant de 0 à $p - 1$ faire : $x$ prend la valeur $\frac{k}{p}$ $I$ prend la valeur $I + \frac{1}{1 + x^n} \times \frac{1}{p}$ Fin Pour Afficher $I$

- a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs  $n = 2$  et  $p = 5$  ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de  $I$  seront arrondies au millième.

$k$	$x$	$I$
0		
4		

- b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale  $I_n$ .

**Partie A**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par  $\mathcal{C}_1$  la courbe représentative de la fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_1(x) = x + e^{-x}$ .

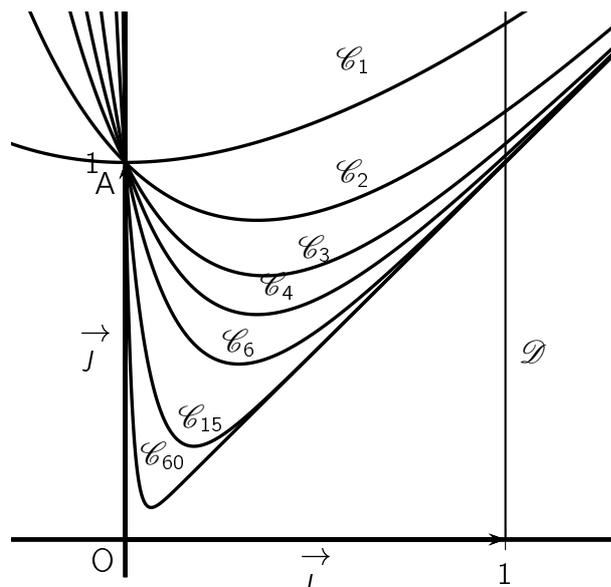
1. Justifier que  $\mathcal{C}_1$  passe par le point A de coordonnées  $(0; 1)$ .
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f_1$ . On précisera les limites de  $f_1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**Partie B**

L'objet de cette partie est d'étudier la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$ .

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = x + e^{-nx}$ .

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe  $\mathcal{C}_n$  pour plusieurs valeurs de l'entier  $n$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = 1$ .



- a. Interpréter géométriquement l'intégrale  $I_n$ .
  - b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$  et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx$ .  
En déduire le signe de  $I_{n+1} - I_n$  puis démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente.
  3. Déterminer l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

1. Soit  $g$  la fonction définie et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 - x + e^x$ .  
Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  (les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).  
En déduire le signe de  $g(x)$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  puis la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. On appelle  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = e^{-x}g(x)$ .
4. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution réelle  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Démontrer que  $-1 < \alpha < 0$ .
6. **a.** Démontrer que la droite  $T$  d'équation  $y = 2x + 1$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.  
**b.** Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $T$ .

**Partie B**

1. Soit  $H$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $H(x) = (-x - 1)e^{-x}$ .  
Démontrer que  $H$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = xe^{-x}$ .
2. On note  $\mathcal{D}$  le domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $T$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 3$ .  
Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ .