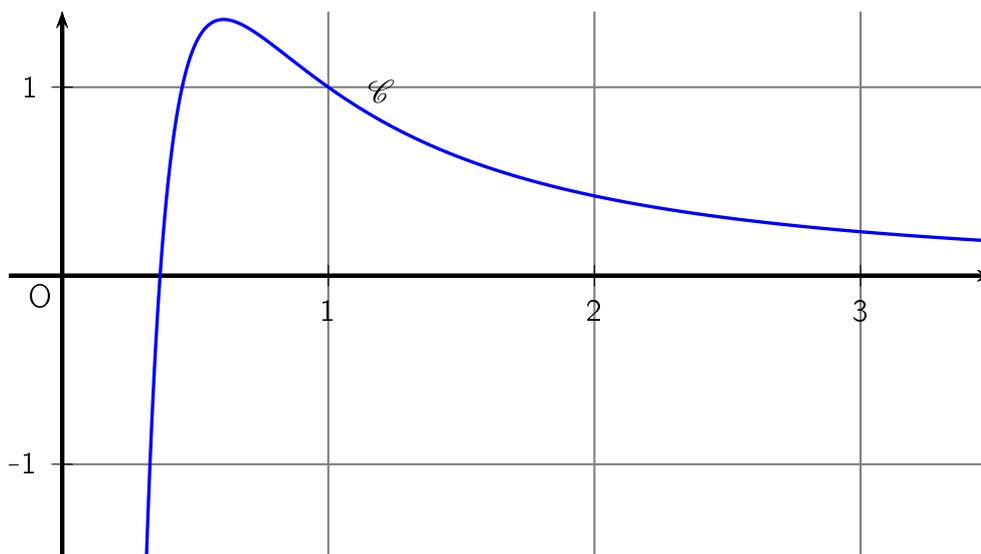


# Fonctions (2013)

## ◆ Exercice 1

(Amérique du Nord, mai 2013) 5 points

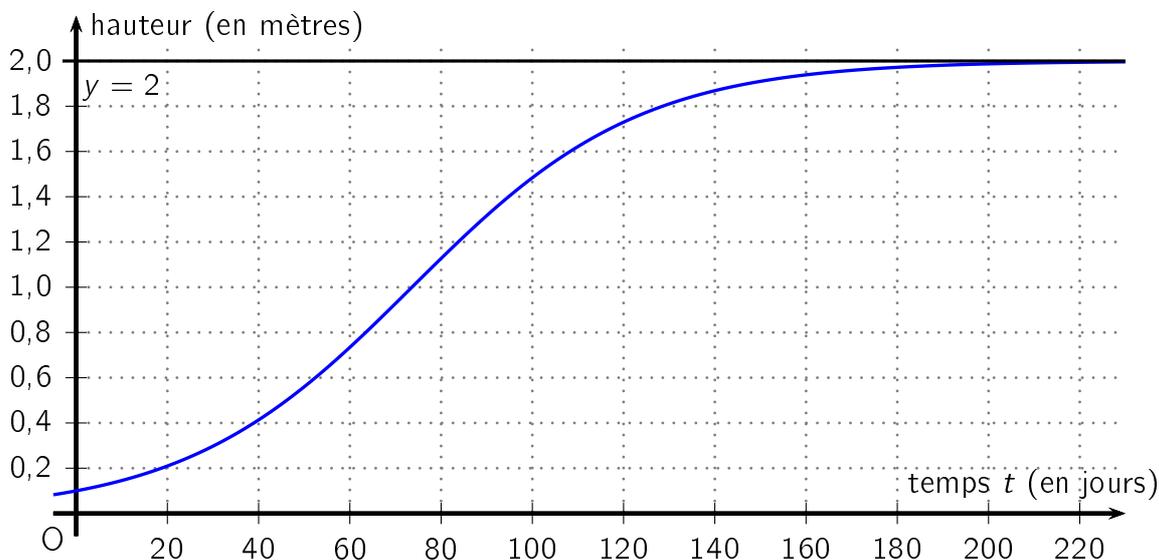
Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$  et soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan. La courbe  $\mathcal{C}$  est donnée ci-dessous :



1.
  - a. Étudier la limite de  $f$  en 0.
  - b. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ ? En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
  - c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe  $\mathcal{C}$ .
2.
  - a. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
Démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$ .
  - b. Résoudre sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  l'inéquation  $-1 - 2 \ln(x) > 0$ .  
En déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - c. Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ .
3.
  - a. Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
  - b. En déduire le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
4. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $I_n$  l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations respectives  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = n$ .
  - a. Démontrer que  $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$ .  
On admet que la fonction  $F$ , définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$ , est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - b. Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Étudier la limite de  $I_n$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**Partie 1**

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :  $h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles positives,  $t$  est la variable temps exprimée en jours et  $h(t)$  désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour  $t = 0$ , le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

Déterminer les constantes  $a$  et  $b$  afin que la fonction  $h$  corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

**Partie 2**

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 250]$  par  $f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$

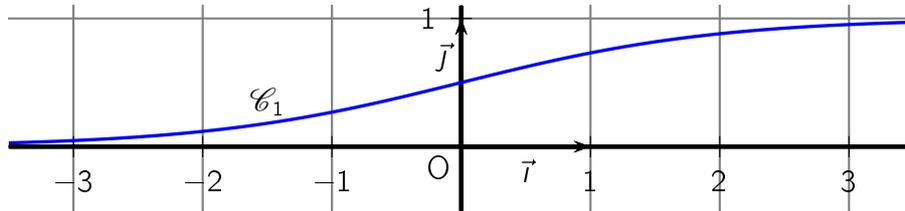
1. Déterminer  $f'(t)$  en fonction de  $t$  ( $f'$  désignant la fonction dérivée de la fonction  $f$ ). En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 250]$ .
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.
3. a. Vérifier que pour tout réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0; 250]$  on a  $f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$ .  
Montrer que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $[0; 250]$  par  $F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$  est une primitive de la fonction  $f$ .
- b. Déterminer la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[50; 100]$ .  
En donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près et interpréter ce résultat.
4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction  $f$ .  
La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de  $t$ .  
En utilisant le graphique donné ci-dessus, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

Étant donné un nombre réel  $k$ , on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}$ .  
Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

Dans cette partie on choisit  $k = 1$ . On a donc, pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ .

La représentation graphique  $\mathcal{C}_1$  de la fonction  $f_1$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est donnée ci-dessous :



1. Déterminer les limites de  $f_1(x)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ .
3. On appelle  $f_1'$  la fonction dérivée de  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$ . Calculer, pour tout réel  $x$ ,  $f_1'(x)$ .  
En déduire les variations de la fonction  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. On définit le nombre  $I = \int_0^1 f_1(x) dx$ .  
Montrer que  $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ . Donner une interprétation graphique de  $I$ .

**Partie B**

Dans cette partie, on choisit  $k = -1$  et on souhaite tracer la courbe  $\mathcal{C}_{-1}$  représentant la fonction  $f_{-1}$ .  
Pour tout réel  $x$ , on appelle  $P$  le point de  $\mathcal{C}_1$  d'abscisse  $x$  et  $M$  le point de  $\mathcal{C}_{-1}$  d'abscisse  $x$ .  
On note  $K$  le milieu du segment  $[MP]$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$ .
2. En déduire que le point  $K$  appartient à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .
3. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_{-1}$ .
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_{-1}$  l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .

**Partie C**

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre  $k$ .  
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel  $k$ , la représentation graphique de la fonction  $f_k$  est strictement comprise entre les droites d'équations  $y = 0$  et  $y = 1$ .
2. Quelle que soit la valeur du réel  $k$ , la fonction  $f_k$  est strictement croissante.
3. Pour tout réel  $k \geq 10$ ,  $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction  $f$ .

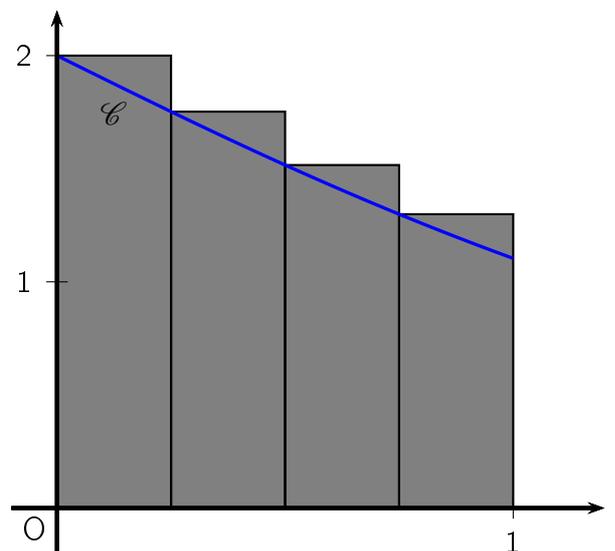
- a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec les axes du repère.
- b. Étudier les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe  $\mathcal{C}$ .
- c. Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note  $\mathcal{D}$  le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ . On approche l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle  $[0 ; 1]$  en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle  $\left[0 ; \frac{1}{4}\right]$ , on construit un rectangle de hauteur  $f(0)$
- Sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$ , on construit un rectangle de hauteur  $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right]$ , on construit un rectangle de hauteur  $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle  $\left[\frac{3}{4} ; 1\right]$ , on construit un rectangle de hauteur  $f\left(\frac{3}{4}\right)$



Cette construction est illustrée ci-contre.

L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

```

Variables : k est un nombre entier
            S est un nombre réel
Initialisation : Affecter à S la valeur 0
Traitement : Pour k variant de 0 à 3
                Affecter à S la valeur  $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$ 
            Fin Pour
Sortie : Afficher S
    
```

Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près du résultat affiché par cet algorithme.

- b. Dans cette question,  $N$  est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle  $[0 ; 1]$  en  $N$  intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des  $N$  rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (-x - 3)e^{-x}$ .

On admet que  $g$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

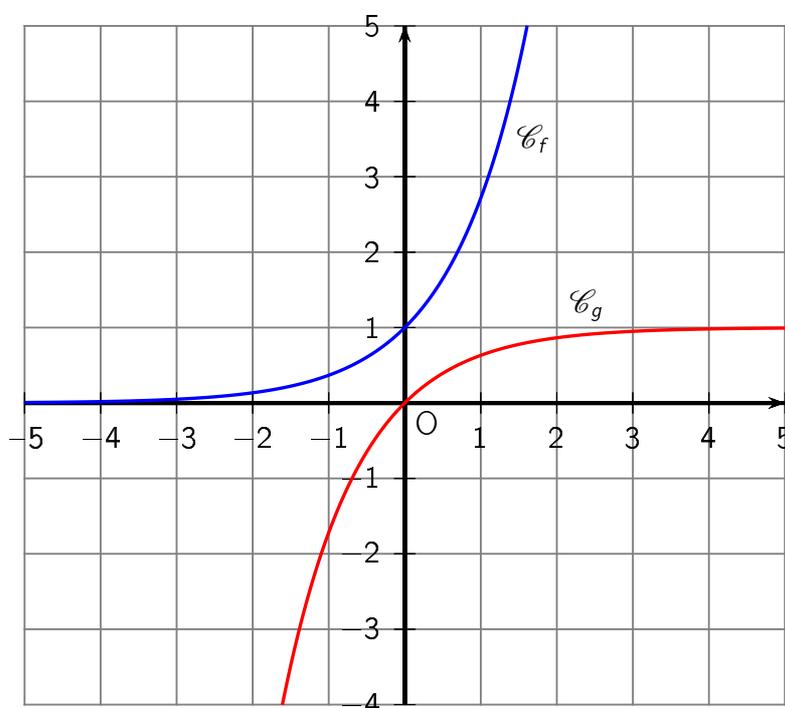
- a. Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $\mathcal{D}$ , exprimée en unités d'aire.
- b. Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de l'erreur commise en remplaçant  $\mathcal{A}$  par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

◆ Exercice 5

(Asie, juin 2013) 6 points

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies pour tout réel  $x$  par  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = 1 - e^{-x}$ .

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , sont représentées ci-dessous :



**Partie A**

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure ci-dessus.

**Partie B**

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note  $\mathcal{D}$  l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A d'abscisse  $a$  et tangente à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point B d'abscisse  $b$ .

1.
  - a. Exprimer en fonction de  $a$  le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A.
  - b. Exprimer en fonction de  $b$  le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point B.
  - c. En déduire que  $b = -a$ .
2. Démontrer que le réel  $a$  est solution de l'équation  $2(x - 1)e^x + 1 = 0$ .

## Partie C

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = 2(x - 1)e^x + 1$ .

- Calculer les limites de la fonction  $\varphi$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - Calculer la dérivée de la fonction  $\varphi$ , puis étudier son signe.
  - Dresser le tableau de variation de la fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ . Préciser la valeur de  $\varphi(0)$ .
- Démontrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet exactement deux solutions dans  $\mathbb{R}$ .
  - On note  $\alpha$  la solution négative de l'équation  $\varphi(x) = 0$  et  $\beta$  la solution positive de cette équation.  
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  arrondies au centième.

## Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

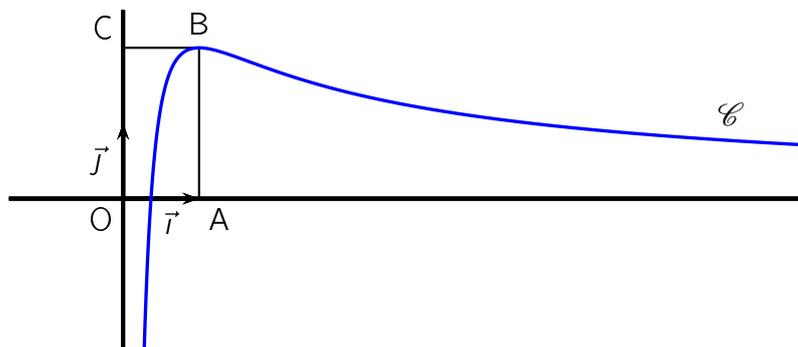
On note E le point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $\alpha$  et F le point de la courbe  $\mathcal{C}_g$  d'abscisse  $-\alpha$  ( $\alpha$  est le nombre réel défini dans la partie C).

- Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point E.
- Démontrer que (EF) est tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point F.

### ◆ Exercice 6

(Métropole, juin 2013) 7 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives  $(1; 0)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(0; 2)$ ;
  - la courbe  $\mathcal{C}$  passe par le point B et la droite (BC) est tangente à  $\mathcal{C}$  en B;
  - il existe deux réels positifs  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}$ .
- En utilisant le graphique, donner les valeurs de  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
    - Vérifier que pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{(b - a) - b \ln x}{x^2}$ .
    - En déduire les réels  $a$  et  $b$ .

2. **a.** Justifier que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x)$  a le même signe que  $-\ln x$ .
- b.** Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . On pourra remarquer que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}$ .
- c.** En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .
3. **a.** Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0 ; 1]$ .
- b.** Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel  $\beta$  de l'intervalle  $]1 ; +\infty]$  tel que  $f(\beta) = 1$ .  
Déterminer l'entier  $n$  tel que  $n < \beta < n + 1$ .
4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :  $a, b$  et  $m$  sont des nombres réels.

Initialisation : Affecter à  $a$  la valeur 0.  
Affecter à  $b$  la valeur 1.

Traitement : Tant que  $b - a > 0,1$

Affecter à $m$ la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$ .
Si $f(m) < 1$ alors Affecter à $a$ la valeur $m$ .
Sinon Affecter à $b$ la valeur $m$ .
Fin de Si.

Fin de Tant que.

Sortie : Afficher  $a$ .  
Afficher  $b$ .

- a.** Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
$a$	0				
$b$	1				
$b - a$					
$m$					

- b.** Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
- c.** Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de  $\beta$  d'amplitude  $10^{-1}$
5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

- a.** Justifier que cela revient à démontrer que  $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1$ .

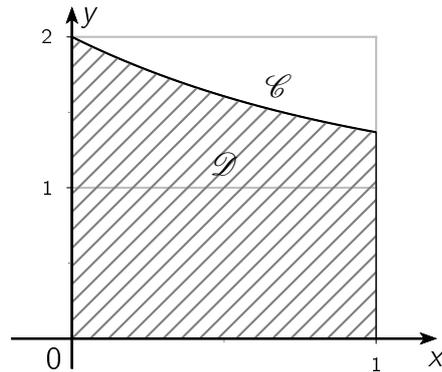
- b.** En remarquant que l'expression de  $f(x)$  peut s'écrire  $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$ , terminer la démonstration.

◆ Exercice 7

(Centres étrangers, juin 2013) 5 points

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $g(x) = 1 + e^{-x}$ .  
On admet que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$ ,  $g(x) > 0$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthogonal, et  $\mathcal{D}$  le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$ , d'autre part entre les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ . La courbe  $\mathcal{C}$  et le domaine  $\mathcal{D}$  sont représentés ci-contre.



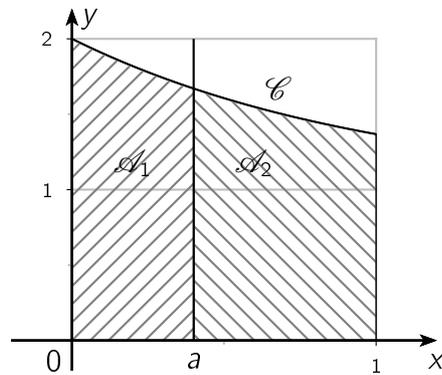
Le but de cet exercice est de partager le domaine  $\mathcal{D}$  en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

**Partie A**

Soit  $a$  un réel tel que  $0 \leq a \leq 1$ .

On note  $\mathcal{A}_1$  l'aire du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe  $(Ox)$ , les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = a$ , puis  $\mathcal{A}_2$  celle du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ ,  $(Ox)$  et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = 1$ .

$\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont exprimées en unités d'aire.



1. a. Démontrer que  $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1$ .  
b. Exprimer  $\mathcal{A}_2$  en fonction de  $a$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$ .
  - a. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On précisera les valeurs exactes de  $f(0)$  et  $f(1)$ .
  - b. Démontrer que la fonction  $f$  s'annule une fois et une seule sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ , en un réel  $\alpha$ . Donner la valeur de  $\alpha$  arrondie au centième.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel  $a$  pour lequel les aires  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont égales.

**Partie B**

Soit  $b$  un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine  $\mathcal{D}$  en deux domaines de même aire par la droite d'équation  $y = b$ . On admet qu'il existe un unique réel  $b$  positif solution.

1. Justifier l'inégalité  $b < 1 + \frac{1}{e}$ . On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel  $b$ .

Dans tout ce qui suit,  $m$  désigne un nombre réel quelconque.

**Partie A**

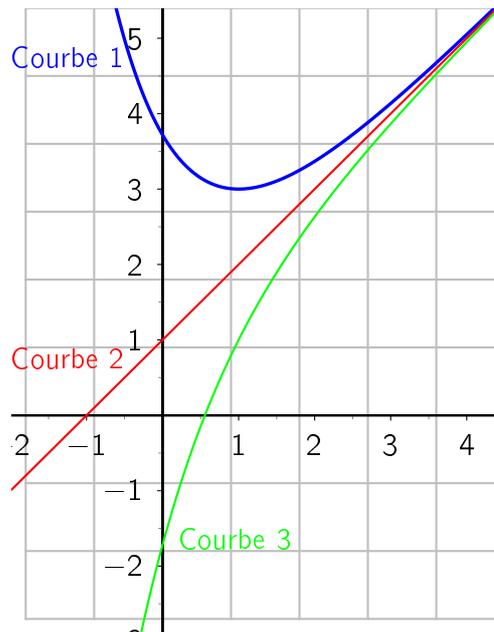
Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x) = (x + 1)e^x$ .

1. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
2. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (x + 2)e^x$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B**

On définit la fonction  $g_m$  sur  $\mathbb{R}$  par  $g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$  et on note  $\mathcal{C}_m$  la courbe de la fonction  $g_m$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1.
  - a. Démontrer que  $g_m(x) = 0$  si et seulement si  $f(x) = m$ .
  - b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_m$  avec l'axe des abscisses en fonction du réel  $m$ .
2. On a représenté ci-dessous les courbes  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_e$ , et  $\mathcal{C}_{-e}$  (obtenues en prenant respectivement pour  $m$  les valeurs 0,  $e$  et  $-e$ ).  
Identifier chacune de ces courbes en justifiant.



3. Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}_m$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$  suivant les valeurs du réel  $m$ .
4.
  - a. On appelle  $D_2$  la partie du plan comprise entre les courbes  $\mathcal{C}_e$ ,  $\mathcal{C}_{-e}$ , l'axe  $(Oy)$  et la droite  $x = 2$ . Hachurer  $D_2$  sur la figure ci-dessus.
  - b. Dans cette question,  $a$  désigne un réel positif,  $D_a$  la partie du plan comprise entre  $\mathcal{C}_e$ ,  $\mathcal{C}_{-e}$ , l'axe  $(Oy)$  et la droite  $\Delta_a$  d'équation  $x = a$ . On désigne par  $\mathcal{A}(a)$  l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.  
Démontrer que pour tout réel  $a$  positif :  $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$ .  
En déduire la limite de  $\mathcal{A}(a)$  quand  $a$  tend vers  $+\infty$ .

Pour tout réel  $k$  strictement positif, on désigne par  $f_k$  la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  telle que  $f_k(x) = kxe^{-kx}$ .

On note  $\mathcal{C}_k$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

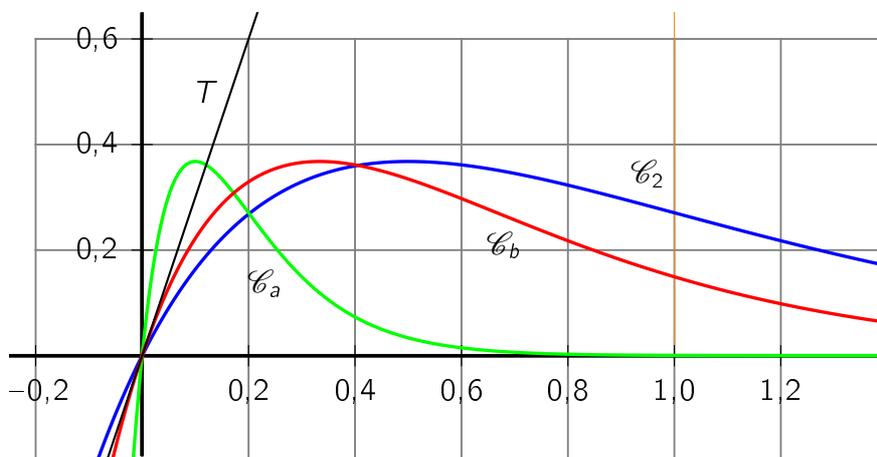
**Partie A : Étude du cas  $k = 1$**

On considère donc la fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_1(x) = xe^{-x}$ .

1. Déterminer les limites de la fonction  $f_1$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . En déduire que la courbe  $\mathcal{C}_1$  admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$  puis dresser son tableau de variation sur  $\mathbb{R}$ .
3. Démontrer que la fonction  $g_1$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g_1(x) = -(x + 1)e^{-x}$  est une primitive de la fonction  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Étudier le signe de  $f_1(x)$  suivant les valeurs du nombre réel  $x$ .
5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}_1$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \ln 10$ .

**Partie B : Propriétés graphiques**

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_a$  et  $\mathcal{C}_b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs fixés et  $T$  la tangente à  $\mathcal{C}_b$  au point  $O$  origine du repère.

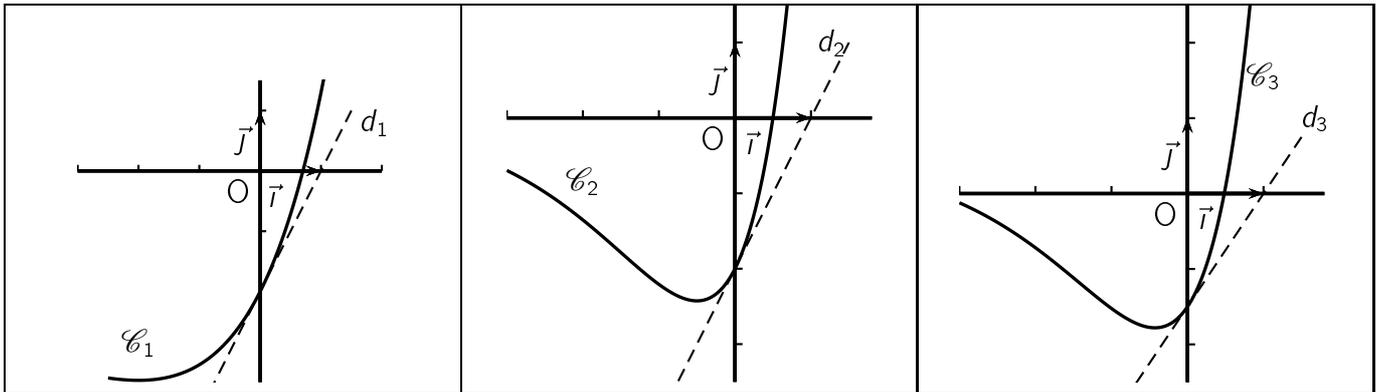
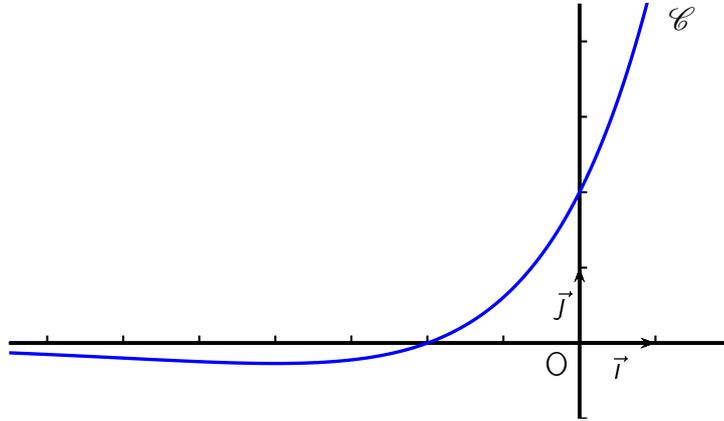


1. Montrer que pour tout réel  $k$  strictement positif, les courbes  $\mathcal{C}_k$  passent par un même point.
2.
  - a. Montrer que pour tout réel  $k$  strictement positif et tout réel  $x$  on a  $f'_k(x) = k(1 - kx)e^{-kx}$ .
  - b. Justifier que, pour tout réel  $k$  strictement positif,  $f_k$  admet un maximum et calculer ce maximum.
  - c. En observant le graphique ci-dessus, comparer  $a$  et  $2$ . Expliquer la démarche.
  - d. Écrire une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_k$  au point  $O$  origine du repère.
  - e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de  $b$ .

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe  $\mathcal{C}$  et trois autres courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de  $f(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
2. On désigne par  $F$  une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - a. À l'aide de la courbe  $\mathcal{C}$ , déterminer  $F'(0)$  et  $F'(-2)$ .
  - b. L'une des courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  est la courbe représentative de la fonction  $F$ . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

**Partie B**

Dans cette partie, on admet que la fonction  $f$  évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{2}x}$ .

1. L'observation de la courbe  $\mathcal{C}$  permet de conjecturer que la fonction  $f$  admet un minimum.
  - a. Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2}(x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$ .
  - b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

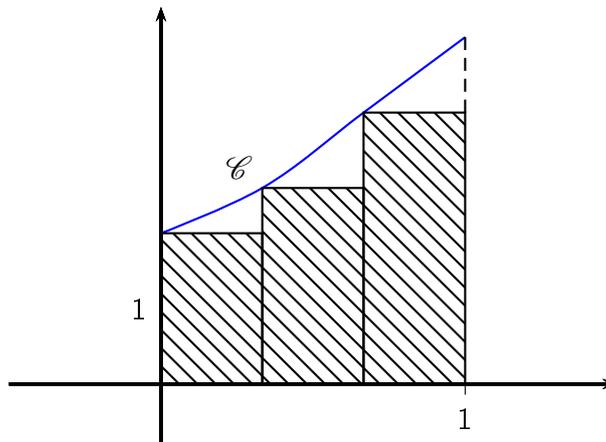
- a. Interpréter géométriquement le réel  $I$ .
- b. Soient  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = x$  et  $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ .  
Vérifier que  $f = 2(u'v + uv')$ .
- c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale  $I$ .

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	$k$ et $n$ sont des nombres entiers naturels. $s$ est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $n$ .
Initialisation :	Affecter à $s$ la valeur 0.
Traitement :	Pour $k$ allant de 0 à $n - 1$   Affecter à $s$ la valeur $s + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ .
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher $s$ .

On note  $s_n$  le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de  $n$ .

- a. Justifier que  $s_3$  représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



- b. Que dire de la valeur de  $s_n$  fournie par l'algorithme proposé lorsque  $n$  devient grand ?

**◆ Exercice 11***(Nouvelle-Calédonie, novembre 2013)* **5 points**

Soit  $f$  la fonction dérivable, définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$ .

**1. Étude d'une fonction auxiliaire**

- Soit la fonction  $g$  dérivable, définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = x^2e^x - 1$ . Étudier le sens de variation de la fonction  $g$ .
- Démontrer qu'il existe un unique réel  $a$  appartenant à  $[0 ; +\infty[$  tel que  $g(a) = 0$ . Démontrer que  $a$  appartient à l'intervalle  $[0,703 ; 0,704[$ .
- Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

**2. Étude de la fonction  $f$** 

- Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
- On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
Démontrer que pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
- En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
- Démontrer que la fonction  $f$  admet pour minimum le nombre réel  $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$ .
- Justifier que  $3,43 < m < 3,45$ .

**◆ Exercice 12***(Amérique du Sud, novembre 2013)* **6 points****Partie A**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{1-x}$ .

- Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$ .
- Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
- Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement cette limite.
- Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .
- Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  puis dresser le tableau de variation.

**Partie B**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère les fonctions  $g_n$  et  $h_n$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}.$$

- Vérifier que, pour tout réel  $x$  :  $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$ .

On obtient alors, pour tout réel  $x \neq 1$  :  $g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ .

- Comparer les fonctions  $h_n$  et  $g'_n$ ,  $g'_n$  étant la dérivée de la fonction  $g_n$ .

En déduire que, pour tout réel  $x \neq 1$  :  $h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$ .

- Soit  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ ,  $f$  étant la fonction définie dans la partie A.

En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de  $S_n$  puis sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .