

Géométrie dans l'espace

Dans ce chapitre, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. Les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont alors :

$$\vec{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

Exemple : Soient $A(1; -2; 3)$ et $B(-2; 3; 1)$. Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{AB} .

Les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $(-2 - 1; 3 - (-2); 1 - 3)$ soit encore $(-3; 5; -2)$.

2. Déterminer les coordonnées du point milieu d'un segment

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. Les coordonnées du point I milieu de $[AB]$ sont alors :

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Exemple : Soient $A(-2; 3; -1)$ et $B(2; 5; -3)$. Déterminer les coordonnées de I milieu de $[AB]$.

Les coordonnées du point I sont $\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{3+5}{2}; \frac{-1-3}{2} \right)$ ou encore $(0; 4; -2)$.

3. Déterminer la norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$. La norme du vecteur \vec{u} , notée $\|\vec{u}\|$, est définie par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Exemple : Soit $\vec{u}(-1; -3; 2)$. Déterminer la norme du vecteur \vec{u} .

La norme du vecteur \vec{u} vaut : $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$.

4. Déterminer la longueur d'un segment

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. La norme du vecteur \vec{AB} , notée $\|\vec{AB}\|$ et correspondant à la longueur du segment $[AB]$, est définie par :

$$\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{(x_{\vec{AB}})^2 + (y_{\vec{AB}})^2 + (z_{\vec{AB}})^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple : Soient $A(-2; 5; 1)$ et $B(2; 5; -2)$. Déterminer la longueur du segment $[AB]$.

On peut d'abord calculer les coordonnées du vecteur \vec{AB} , puis déterminer sa norme $\|\vec{AB}\|$.

On a $\vec{AB}(4; 0; -3)$ donc $\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Conseil : Vous pouvez aussi utiliser directement la formule avec les coordonnées des points. Mais je vous conseille dans un premier temps de calculer les coordonnées du vecteur dont vous voulez avoir la norme, puis ensuite de mettre à la racine carré la somme des carrés de chaque coordonnée comme ce qui a été fait précédemment. Les coordonnées du vecteur que vous avez calculées pourront éventuellement servir dans la suite d'un exercice et cela vous fera gagner du temps.

5. Montrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral

Montrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral revient à montrer que deux (pour isocèle) ou trois (pour équilatéral) de ses côtés sont égaux. Il faudra donc calculer les trois longueurs.

Exemple : Soient $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 2; -1)$ et $C(-2; 3; -2)$. Déterminer la nature du triangle ABC .

Il faut calculer les trois longueurs AB , AC et BC .

On a $\overrightarrow{AB}(3; 1; -2)$, $\overrightarrow{AC}(-1; 2; -3)$ et $\overrightarrow{BC}(-4; 1; -1)$ d'où :

$$AB = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Comme $AB = AC$, le triangle est isocèle en A .

6. Montrer que deux vecteurs sont colinéaires

Montrer que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires revient à montrer qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple : Soient $\vec{u}(3; -6; 9)$ et $\vec{v}(-1; 2; -3)$. Montrer que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Ici, on observe que $\vec{u} = -3\vec{v}$, ce qui signifie que les vecteurs sont colinéaires.

Si vous ne voyez pas la relation $\vec{u} = -3\vec{v}$, vous pouvez déterminer la valeur de k sur chaque coordonnée et vérifier que l'on trouve bien la même :

$$\vec{u} = k\vec{v} \iff \begin{cases} 3 = -1k \\ -6 = 2k \\ 9 = -3k \end{cases} \iff \begin{cases} k = -3 \\ k = \frac{-6}{2} \\ k = \frac{9}{-3} \end{cases} \iff \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \\ k = -3 \end{cases}$$

coordonnées de \vec{u} coordonnées de \vec{v}

On retrouve bien la même valeur de k pour les trois coordonnées, donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

7. Montrer que trois points sont alignés

Montrer que trois points A , B et C sont alignés revient à montrer que deux vecteurs formés à partir de ces trois points (par exemple \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}) sont colinéaires.

Exemple : Soient $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 2; -1)$ et $C(-7; -1; 5)$. Montrer que A , B et C sont alignés.

On construit deux vecteurs à partir de ces trois points, par exemple \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

On a $\overrightarrow{AB}(3; 1; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-6; -2; 4)$. On remarque que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$, ce qui signifie que les deux vecteurs sont colinéaires et que donc les points A , B et C sont alignés.

Conseil : Si la relation $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ ne vous paraît pas évidente, n'hésitez pas à refaire les étapes présentées dans le point précédent pour montrer que deux vecteurs sont colinéaires. Je vous les refais ici quand même. La question à se poser est : existe-t-il une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$? C'est la définition même de la colinéarité entre deux vecteurs. Déterminons pour cela la constante k pour chaque coordonnée et vérifions si c'est la même ou pas.

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} -6 = 3k \\ -2 = k \\ 4 = -2k \end{cases} \iff \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

On trouve bien la même valeur de k pour chaque coordonnée, donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires et les points A , B et C sont alors alignés.

8. Calculer un produit scalaire entre deux vecteurs

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$$

Exemple : Soient $\vec{u}(-2; -1; 4)$ et $\vec{v}(-1; 2; -3)$. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

En reprenant la définition, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 4 \times (-3) = 2 - 2 - 12 = -12$.

9. Déterminer une valeur de l'angle formé entre deux vecteurs

Pour déterminer une valeur de l'angle formé entre deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} noté $(\vec{u}; \vec{v})$, il faut revenir à une des premières définitions du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \iff \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

À partir de la valeur du cosinus de l'angle, on peut facilement en déduire une valeur de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ avec la calculatrice.

Exemple : Soient $\vec{u}(-2; -1; 4)$ et $\vec{v}(-1; 2; -3)$. Déterminer une valeur de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$.

Il faut dans un premier temps calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ puis $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 4 \times (-3) = 2 - 2 - 12 = -12$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\text{On calcule ensuite la valeur de } \cos(\vec{u}; \vec{v}) : \quad \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{-12}{\sqrt{21} \times \sqrt{14}}$$

Grâce à la calculatrice (avec la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ ou $\boxed{\arccos}$), on trouve $(\vec{u}; \vec{v}) = 134,4^\circ$.

Remarque : Si vous trouvez un résultat différent, vérifiez que vous avez bien mis votre calculatrice en degré et non pas en radian. Je vous rappelle que pour convertir des radians en degrés, il faut multiplier par $\frac{180}{\pi}$.

10. Montrer que deux vecteurs sont orthogonaux

Montrer que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux revient à montrer que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul.

Exemple : Soient $\vec{u}(1; -2; 5)$ et $\vec{v}(-1; 2; 1)$. Montrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Ici, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) - 2 \times 2 + 5 \times 1 = 0$ donc \vec{u} et \vec{v} sont bien orthogonaux.

11. Montrer qu'un angle est un angle droit

Pour montrer qu'un angle \widehat{ABC} est un angle droit, il suffit de montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ est nul. Le triangle ABC est alors rectangle en B.

Exemple : Soient A $(1; -2; 0)$, B $(-1; -2; 1)$ et C $(-2; 1; -1)$.

Montrer que l'angle \widehat{ABC} est un angle droit.

On a : $\overrightarrow{BA}(2; 0; -1)$ et $\overrightarrow{BC}(-1; 3; -2)$. De plus :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times (-1) + 0 \times (3) + (-1) \times (-2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ étant nul, l'angle \widehat{ABC} est alors un angle droit.

12. Montrer qu'un triangle est rectangle

Pour montrer qu'un triangle ABC est rectangle en A, il suffit de montrer que \vec{AB} est orthogonal à \vec{AC} , donc que le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est nul.

Exemple : Soient A (3; -2; 2), B (6; -2; -1) et C (6; 1; 5). Montrer que ABC est rectangle.

On a : \vec{AB} (3; 0; -3); \vec{BC} (0; 3; 6) et \vec{AC} (3; 3; 3).

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 3 \times 0 + 0 \times 3 + (-1) \times 6 = -6 \neq 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{AC} = 0 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 6 = 27 \neq 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 3 + 0 \times 3 - 3 \times 3 = 0$$

Cela signifie que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont orthogonaux donc que le triangle ABC est rectangle en A.

13. Déterminer la nature d'un triangle

Un triangle peut être :

- ▶ équilatéral
- ▶ isocèle en un point
- ▶ rectangle
- ▶ isocèle et rectangle en un point
- ▶ quelconque

Ce dernier cas n'est pas intéressant si on vous pose cette question. Pour déterminer la nature d'un triangle ABC, il faut dans un premier temps calculer les trois longueurs AB, AC et BC. On pourra déjà en déduire si il est isocèle ou équilatéral. Si il est équilatéral, vous pouvez vous arrêter là. Si il est isocèle en A par exemple, il peut également être rectangle en A. Vous pouvez ainsi le vérifier facilement à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore ou en calculant le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Exemple : Soient A (2; 3; -6), B (-1; 3; -2) et C (2; 8; -6). Déterminer la nature du triangle ABC.

On calcule les trois longueurs AB, AC et BC.

On a \vec{AB} (-3; 0; 4), \vec{AC} (0; 5; 0) et \vec{BC} (3; 5; -4) d'où :

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 25 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

On remarque que $AB = AC$ donc le triangle est isocèle en A. Peut-il être rectangle en A ?

Méthode 1

On peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, c'est-à-dire vérifier si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

$$AB^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$$

$$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

La relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ étant vérifiée, le triangle ABC est aussi rectangle en A.

Méthode 2

Si le triangle est rectangle en A, alors les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont orthogonaux et le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ doit être nul. On a :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3) \times 0 + 0 \times 5 + 4 \times 0 = 0$$

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A.

Conclusion : Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

14. Montrer que trois points définissent un plan

Pour montrer que trois points A, B et C définissent un plan, il faut prouver que ces trois points ne sont pas alignés. Il suffit donc de montrer que deux vecteurs construits à partir de ces trois points (par exemple \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}) ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire prouver qu'il n'existe pas de constante k ($k \in \mathbb{R}$) telle que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Exemple : Soient A (3 ; -2 ; 2), B (6 ; -2 ; -1) et C (6 ; 1 ; 5). Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

On a \overrightarrow{AB} (3 ; 0 ; -3) et \overrightarrow{AC} (3 ; 3 ; 3). Existe-t-il une constante k ($k \in \mathbb{R}$) telle que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$?

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 3 = 3k \\ 0 = 3k \\ -3 = 3k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1 \\ k = 0 \\ k = -1 \end{cases}$$

On trouve trois valeurs de k différentes, ce qui signifie que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et donc que les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

15. Montrer qu'un vecteur est normal à un plan

Pour montrer qu'un vecteur est normal à un plan, il faut montrer qu'il est orthogonal à **deux vecteurs** non colinéaires de ce plan.

Exemple : Soient A (3 ; -2 ; 2), B (6 ; -2 ; -1) et C (6 ; 1 ; 5). Montrer que le vecteur \vec{n} (1 ; -2 ; 1) est normal au plan (ABC).

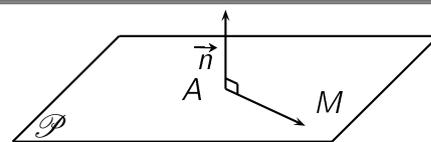
Pour cela il faut montrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} (3 ; 0 ; -3) et \overrightarrow{BC} (0 ; 3 ; 6) par exemple sont bien orthogonaux.

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 3 \times 1 + 0 \times (-2) + (-3) \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0 \times 0 + 3 \times (-2) + 6 \times 1 = 0$. Le vecteur \vec{n} est bien normal au plan (ABC).

Attention : il faut montrer que **DEUX** vecteurs qui dirigent le plan sont bien orthogonaux à \vec{n} . Un seul ne suffit pas.

16. Déterminer une équation cartésienne d'un plan

Soient A (x_A ; y_A ; z_A) un point appartenant au plan \mathcal{P} et \vec{n} (a ; b ; c) un vecteur normal à ce plan. Ces deux informations sont suffisantes pour définir un plan car il existe un plan unique passant par un point et ayant un vecteur normal défini.



Le plan \mathcal{P} est l'ensemble des points M (x ; y ; z) tel que \overrightarrow{AM} ($x - x_A$; $y - y_A$; $z - z_A$) est orthogonal à \vec{n} d'où :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 && \text{(traduction mathématique de deux vecteurs orthogonaux)} \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 && \text{(calcul du produit scalaire)} \\ &\iff ax + by + cz - \underbrace{ax_A - by_A - cz_A}_{= d} = 0 && \text{(développement de l'équation précédente)} \\ &\iff ax + by + cz + d = 0 && \text{(en posant } d = -ax_A - by_A - cz_A) \end{aligned}$$

L'équation cartésienne d'un plan est donc de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a , b , c et d des constantes réelles.

Remarques :

► Il est important de noter que, dans l'équation cartésienne du plan, les coefficients a , b et c , respectivement devant x , y et z correspondent aux coordonnées d'un vecteur normal à un plan.

► Une équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Exemple : Soient $A(3; -2; 2)$, un point appartenant au plan \mathcal{P} et $\vec{n}(1; -2; 1)$ un vecteur normal à ce plan. Déterminer l'équation du plan \mathcal{P} .

On peut utiliser deux méthodes permettant de déterminer l'équation cartésienne du plan \mathcal{P} .

Méthode 1

On reprend la méthode précédente. Le plan \mathcal{P} est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $\vec{AM}(x-3; y+2; z-2)$ est orthogonal à \vec{n} d'où :

$$M \in \mathcal{P} \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff x - 3 - 2(y + 2) + z - 2 = 0 \iff \boxed{x - 2y + z - 9 = 0}$$

Remarque : Pour s'assurer que l'équation du plan est juste, on peut vérifier que :

- le point A appartient bien au plan. En effet, $x_A - 2y_A + z_A - 9 = 3 - 2 \times (-2) + 2 - 9 = 0$. Comme les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan \mathcal{P} , ce point appartient bien au plan.
- les coefficients devant x , y , et z sont bien les coordonnées de \vec{n} . En effet, $(1; -2; 1)$ correspondent bien aux coordonnées de \vec{n} .

Méthode 2

On sait que si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur orthogonal au plan \mathcal{P} , alors son équation cartésienne est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec d une constante à déterminer. Ici on a donc : $x - 2y + z + d = 0$. Pour déterminer la constante d , on écrit que le point A appartient au plan \mathcal{P} donc que ses coordonnées vérifient l'équation du plan d'où :

$$x_A - 2y_A + z_A + d = 0 \iff 3 - 2(-2) + 2 + d = 0 \iff d = -9$$

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est donc $x - 2y + z - 9 = 0$.

On retrouve bien la même équation que précédemment.

17. Vérifier si une équation cartésienne de plan est correcte

On suppose que le plan est défini par trois points non alignés. Pour vérifier si une équation cartésienne de ce plan est correcte, le plus simple est de montrer que les coordonnées des trois points du plan vérifient l'équation cartésienne du plan.

Exemple : Soient $A(3; -2; 2)$, $B(2; -3; 1)$ et $C(4; 0; 5)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $-x + 2y - z + 9 = 0$. Vrai ou faux ?

C'est une question que l'on retrouve régulièrement dans les « Vrai ou Faux ? » ou dans les QCM.

On vérifie que les trois points appartiennent bien au plan proposé. Si un point appartient au plan, alors ses coordonnées vérifient l'équation du plan. On a :

$$-x_A + 2y_A - z_A + 9 = -3 + 2 \times (-2) - 2 + 9 = -3 - 4 - 2 + 9 = 0$$

$$-x_B + 2y_B - z_B + 9 = -2 + 2 \times (-3) - 1 + 9 = -2 - 6 - 1 + 9 = 0$$

$$-x_C + 2y_C - z_C + 9 = -4 + 2 \times 0 - 5 + 9 = -4 - 5 + 9 = 0$$

Les trois points vérifient l'équation du plan proposé donc ils appartiennent bien à ce plan et il s'agit alors bien d'une équation cartésienne du plan (ABC) .

18. Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne

Soit \mathcal{P} le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ avec a , b , c et d des constantes réelles. Les coordonnées d'un vecteur normal \vec{n} à ce plan correspondent aux coefficients devant x , y et z , c'est-à-dire $(a ; b ; c)$.

Exemple : Soit \mathcal{P} le plan d'équation $x - 2y + z - 9 = 0$. Déterminer un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

Les coefficients devant x , y et z sont respectivement $(1 ; -2 ; 1)$. Il s'agit donc des coordonnées d'un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

19. Montrer qu'un point appartient à un plan

Soit \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Pour montrer que le point A $(x_A ; y_A ; z_A)$ appartient bien au plan, il faut vérifier que ces coordonnées vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire vérifier que $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$.

Exemple : Soit \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne $2x - y + z + 1 = 0$. Montrer que le point A $(2 ; 4 ; -1)$ appartient au plan \mathcal{P} .

Vérifions si les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan \mathcal{P} :

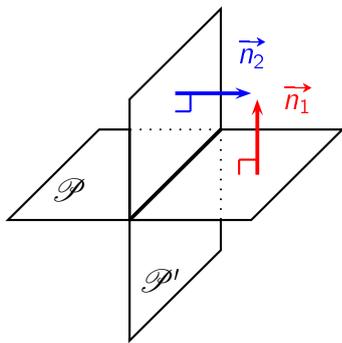
$$2x_A - y_A + z_A + 1 = 2 \times 2 - 4 - 1 + 1 = 0$$

Les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan \mathcal{P} donc le point A appartient bien au plan.

20. Déterminer la position relative entre deux plans

Exemple :

21. Montrer que deux plans sont perpendiculaires



On suppose que les deux plans sont définis par leur équation cartésienne, on peut alors en tirer facilement un vecteur normal pour chacun d'entre eux. Pour montrer que ces deux plans sont perpendiculaires, il suffit alors de montrer que le vecteur normal de l'un est orthogonal au vecteur normal de l'autre, c'est-à-dire que prouver que le produit scalaire des deux vecteurs est nul.

Exemple : Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans d'équation cartésienne respective $x - y - z + 2 = 0$ et $-x + 4y - 5z - 1 = 0$. Montrer que les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont perpendiculaires.

Un vecteur normal du plan \mathcal{P} est $\vec{n}_1 (1; -1; -1)$.

Un vecteur normal du plan \mathcal{P}' est $\vec{n}_2 (-1; 4; -5)$.

On rappelle qu'en ayant les équations cartésiennes des deux plans, on peut facilement avoir un vecteur normal car il s'agit des coefficients devant x , y et z .

Calculons le produit scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times (-1) + (-1) \times 4 + (-1) \times (-5) = -1 - 4 + 5 = 0$$

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont orthogonaux et les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont alors perpendiculaires.

22. Montrer que deux plans sont parallèles

► Si on suppose que les deux plans sont définis par leur équation cartésienne, on peut alors en tirer facilement un vecteur normal pour chacun d'entre eux. Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que le vecteur normal de l'un est colinéaire au vecteur normal de l'autre.

► On suppose qu'un plan est défini par son équation cartésienne (on peut donc avoir un vecteur normal \vec{n} de ce plan) et que l'autre est défini par trois points (on peut donc avoir deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} qui dirigent ce plan). Pour montrer que ces deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que le vecteur \vec{n} est orthogonal à la fois à \vec{u} et à \vec{v} , autrement dit que les produits scalaires $\vec{n} \cdot \vec{u}$ et $\vec{n} \cdot \vec{v}$ sont nuls.

Exemple :

23. Déterminer une équation paramétrique d'un plan

24. Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point appartenant à la droite \mathcal{D} et $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ un vecteur directeur de cette droite. On peut définir la droite \mathcal{D} comme étant l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $\vec{AM}(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ est colinéaire à \vec{u} .

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R} / \vec{AM} = t\vec{u} \quad (\text{définition de la colinéarité entre deux vecteurs})$$

$$\iff \begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \\ z - z_A = \gamma t \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}} \quad (\text{représentation paramétrique de la droite})$$

Exemple : Soient $A(3; -2; 2)$ et $B(6; -2; 1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\vec{AB}(3; 0; -3)$. On peut définir cette droite comme étant l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $\vec{AM}(x - 3; y + 2; z - 2)$ est colinéaire à $\vec{AB}(3; 0; -3)$ d'où :

$$M \in (AB) \iff \exists t \in \mathbb{R} / \vec{AM} = t\vec{AB} \iff \begin{cases} x - 3 = 3t \\ y + 2 = 0t \\ z - 2 = -1t \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 \\ z = 2t \end{cases}}$$

Il n'est pas nécessaire de faire la démonstration entièrement, vous pouvez écrire directement le résultat.

Remarque : Une représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique. Il existe donc plusieurs représentations paramétriques d'une même droite.

Dans l'exemple précédent, on peut aussi définir la droite (AB) comme étant l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $\vec{BM}(x - 6; y + 2; z - 1)$ est colinéaire à $\vec{BA}(-3; 0; 1)$. On aurait alors trouvé :

$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -2 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

On n'obtient pas la même représentation paramétrique mais il s'agit aussi d'UNE représentation paramétrique de la droite (AB) . Il existe donc plusieurs réponses à ce genre de question.

Attention : Si on travaille dans l'espace, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $y = ax + b$ N'EST PAS une droite. Il s'agit d'un plan dont un vecteur normal est \vec{n} de coordonnées $(a; -1; 0)$. Il suffit de réécrire l'équation sous cette forme $ax - y + b = 0$ pour s'apercevoir qu'il s'agit bien d'un plan et pas d'une droite.

25. Vérifier qu'une représentation paramétrique de droite est correcte

► Soit \mathcal{D} la droite passant par le point A $(x_A ; y_A ; z_A)$ et ayant pour vecteur directeur \vec{u} . On nous propose une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} que nous noterons \mathcal{D}' . À partir de cette représentation paramétrique, on peut tirer facilement un vecteur directeur \vec{v} . On rappelle qu'il s'agit des coefficients devant le paramètre t . Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} , il suffit de vérifier que :

- \vec{u} est colinéaire à \vec{v} , c'est-à-dire montrer qu'il existe une constante k ($k \in \mathbb{R}$) telle que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- le point A appartient à la droite \mathcal{D}' dont on nous propose une représentation paramétrique.

Si ces deux conditions sont réunies, alors il s'agit d'une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .

Soient A $(x_A ; y_A ; z_A)$ un point appartenant à la droite \mathcal{D} et $\vec{u}(\alpha ; \beta ; \gamma)$ un vecteur directeur de cette droite. On peut définir la droite \mathcal{D} comme étant l'ensemble des points M $(x ; y ; z)$ tel que $\overrightarrow{AM}(x - x_A ; y - y_A ; z - z_A)$ est colinéaire à \vec{u} .

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \quad (\text{définition de la colinéarité entre deux vecteurs})$$

$$\iff \begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \\ z - z_A = \gamma t \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}} \quad (\text{représentation paramétrique de la droite})$$

Exemple : On reprend les mêmes points que précédemment : A $(3 ; -2 ; 2)$ et B $(6 ; -2 ; 1)$. Parmi les deux représentations paramétriques suivantes, laquelle en est une de la droite (AB) ?

Un vecteur directeur de cette droite est : $\overrightarrow{AB}(3 ; 0 ; -3)$.

La droite (AB) est l'ensemble des points M $(x ; y ; z)$ tel que $\overrightarrow{AM}(x - 3 ; y + 2 ; z - 2)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}(3 ; 0 ; -1)$ d'où :

$$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} x - 3 = 3.t \\ y + 2 = 0.t \\ z - 2 = -1.t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 + 3.t \\ y = -2 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

26. Déterminer un vecteur directeur d'une droite

27. Montrer qu'un point appartient à une droite

28. Déterminer la position relative entre deux droites

29. Montrer que deux droites sont orthogonales

Pour montrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de montrer que le vecteur directeur de l'une est orthogonal au vecteur directeur de l'autre, c'est-à-dire que le produit scalaire des deux vecteurs est nul.

Attention : deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes.

Exemple : Soient $A(-1; -3; 2)$, $B(-2; 1; -3)$ et \mathcal{D} une droite dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 - t \\ z = -2 - t \end{cases}$$
. Montrer que les droites (AB) et \mathcal{D} sont orthogonales.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-1; 4; -5)$.

Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} est $\vec{u}(1; -1; -1)$.

On rappelle qu'il s'agit des coefficients devant le paramètre t dans la représentation paramétrique.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (-1) \times 1 + 4 \times (-1) + (-5) \times (-1) = -1 - 4 + 5 = 0.$$

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \vec{u} sont orthogonaux et les droites (AB) et \mathcal{D} sont alors orthogonales.

30. Montrer que deux droites sont parallèles

Montrer que deux droites sont parallèles revient à montrer que le vecteur directeur de l'une est colinéaire au vecteur directeur de l'autre.

Exemple : Soient $A(-1; -3; 2)$, $B(-2; 1; -3)$ et \mathcal{D} une droite dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 - 4t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$$
. Montrer que les droites (AB) et \mathcal{D} sont parallèles.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-1; 4; -5)$.

Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} est $\vec{u}(1; -4; 5)$.

On rappelle qu'il s'agit des coefficients devant le paramètre t dans la représentation paramétrique.

On remarque que $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \vec{u} sont colinéaires et les droites (AB) et \mathcal{D} sont alors parallèles.

31. Montrer que deux droites sont coplanaires

32. Déterminer la position relative d'une droite par rapport à un plan

33. Déterminer la nature de l'intersection d'un plan avec une droite

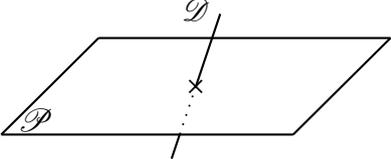
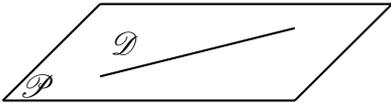
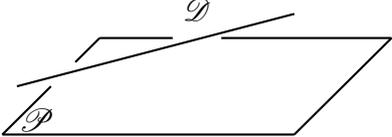
Soient \mathcal{P} le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et \mathcal{D} la droite dont la représentation paramétrique

$$\text{est } \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \text{ avec } A(x_A; y_A; z_A) \text{ un point appartenant à la droite } \mathcal{D}.$$

L'intersection du plan \mathcal{P} avec la droite \mathcal{D} peut être **un point**, **une droite** ou **l'ensemble vide**. Pour déterminer l'intersection entre le plan \mathcal{P} et la droite \mathcal{D} , on résout le système formé par l'équation du plan et la représentation paramétrique de la droite :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Ce système, bien qu'il comporte quatre équations est assez simple à résoudre. Il faut remplacer dans la dernière équation x , y et z de façon à se retrouver avec une équation ne comportant que du t et des constantes. À cette étape, il peut se passer trois choses qui définirons alors la nature de l'intersection.

Un point	Une droite	Ensemble vide
		
<p>L'intersection est un point. Lors de la résolution du système d'équations comme décrit précédemment, on trouve une valeur de t. On remplace la valeur de t dans la représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} et on détermine alors les coordonnées du point d'intersection, ici noté A.</p>	<p>L'intersection est une droite, et plus particulièrement la droite \mathcal{D} qui est alors contenue dans le plan \mathcal{P}. En résolvant le système précédent, on ne trouve pas de valeur de t car il n'en reste plus dans l'équation (4), et on se retrouve avec une équation du type « $0 = 0$ ».</p>	<p>Il s'agit d'un ensemble vide car la droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P}. En résolvant le système précédent, on se retrouve avec une équation du type « $0 = 1$ » qui est impossible.</p>

Exemples : Déterminer la nature de l'intersection entre la droite \mathcal{D} dont la représentation paramétrique

$$\text{est } \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \text{ et les plans } \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \text{ et } \mathcal{P}_3 \text{ d'équations respectives } x + y + z - 4 = 0, \\ x - z - 3 = 0 \text{ et } x - z = 0.$$

Pour déterminer la nature de l'intersection entre le plan \mathcal{P}_1 et la droite \mathcal{D} , on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ -2t - 2 - 2t - 3 - 2t - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

On trouve une valeur de t qui nous permet d'en déduire que l'intersection est un point dont les coordonnées sont $(3; 1; 0)$.

On cherche maintenant l'intersection du plan \mathcal{P}_2 avec la droite \mathcal{D} . De même, on résout le système :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ x - z - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ -2t + 3 + 2t - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On se retrouve avec une équation du type « $0=0$ » qui nous permet d'en déduire que l'intersection est la droite \mathcal{D} , ce qui signifie que la droite \mathcal{D} est incluse dans le plan \mathcal{P}_2 .

On cherche maintenant l'intersection du plan \mathcal{P}_3 d'équation $x - z = 0$ avec la droite \mathcal{D} . On résout le système :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ -2t + 3 + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \\ 3 = 0 \end{cases}$$

On trouve l'équation $3 = 0$ qui est impossible, ce qui signifie ici que l'intersection est vide et donc que la droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P}_3 .

34. Montrer qu'une droite est orthogonale à un plan

► Si on suppose que le plan est défini par son équation cartésienne, on peut alors avoir un vecteur normal à ce plan. Pour montrer qu'une droite est orthogonale à ce plan, il suffit de montrer que le vecteur directeur de la droite est colinéaire au vecteur normal du plan.

► Si on suppose que le plan est défini par trois points non alignés, on peut alors en tirer deux vecteurs non colinéaires qui dirigent ce plan. Pour montrer qu'une droite est orthogonale à ce plan, il suffit de montrer que le vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs qui dirigent le plan.

Exemple 1 : Soit \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$ et \mathcal{D} la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 - 4t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$. Montrer que la droite \mathcal{D} est orthogonale au plan \mathcal{P} .

Un vecteur normal du plan \mathcal{P} est $\vec{n}_1 (1; -1; -1)$.

Un vecteur normal du plan \mathcal{P}' est $\vec{n}_2 (-1; 4; -5)$.

On rappelle qu'en ayant les équations cartésiennes des deux plans, on peut facilement avoir un vecteur normal car il s'agit des coefficients devant x , y et z .

Calculons le produit scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times (-1) + (-1) \times 4 + (-1) \times (-5) = -1 - 4 + 5 = 0$$

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont orthogonaux et les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont alors perpendiculaires.

35. Montrer qu'une droite est parallèle à un plan