

# Complexes (2014)

## ◆ Exercice 1

(Nouvelle-Calédonie, mars 2014) 4 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

**Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.**

Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $z$  un nombre complexe de la forme  $x + iy$ , où  $x$  et  $y$  sont des réels.

1. Soit  $z$  le nombre complexe d'affixe  $(1 + i)^4$ . L'écriture exponentielle de  $z$  est :
  - a.  $\sqrt{2}e^{i\pi}$
  - b.  $4e^{i\pi}$
  - c.  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
  - d.  $4e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. L'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z = x + iy$  tels que  $|z - 1 + i| = |\sqrt{3} - i|$  a pour équation :
  - a.  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
  - b.  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
  - c.  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
  - d.  $y = x + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$
3. On considère la suite de nombres complexes  $(Z_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $Z_0 = 1 + i$  et  $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$ . On note  $M_n$  le point du plan d'affixe  $Z_n$ .
  - a. Pour tout entier naturel  $n$ , le point  $M_n$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .
  - b. Pour tout entier naturel  $n$ , le triangle  $OM_nM_{n+1}$  est équilatéral.
  - c. La suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = |Z_n|$  est convergente.
  - d. Pour tout entier naturel  $n$ , un argument de  $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_n}$  est  $\frac{\pi}{2}$ .
4. Soit  $A, B, C$  trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 - i \quad ; \quad Z_B = 2 - 2i \quad \text{et} \quad Z_C = 1 + 5i.$$

$$\text{On pose } Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}.$$

- a.  $Z$  est un nombre réel.
- b. Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ .
- c. Le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .
- d. Le point  $M$  d'affixe  $Z$  appartient à la médiatrice du segment  $[BC]$ .

On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par  $z_0 = \sqrt{3} - i$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

**Partie A**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

1. Calculer  $u_0$ .
2. Démontrer que  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
5. Étant donné un réel positif  $p$ , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  telle que  $u_n > p$ .

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier  $n$ .

<b>Variables</b>	: $u$ est un réel $p$ est un réel $n$ est un entier
<b>Initialisation</b>	: Affecter à $n$ la valeur 0 Affecter à $u$ la valeur 2
<b>Entrée</b>	: Demander la valeur de $p$
<b>Traitement</b>	:
<b>Sortie</b>	:

**Partie B**

1. Déterminer la forme algébrique de  $z_1$ .
2. Déterminer la forme exponentielle de  $z_0$  et de  $1 + i$ .  
En déduire la forme exponentielle de  $z_1$ .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

◆ Exercice 3

(Pondichéry, avril 2014) 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
 Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left( \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n.$$

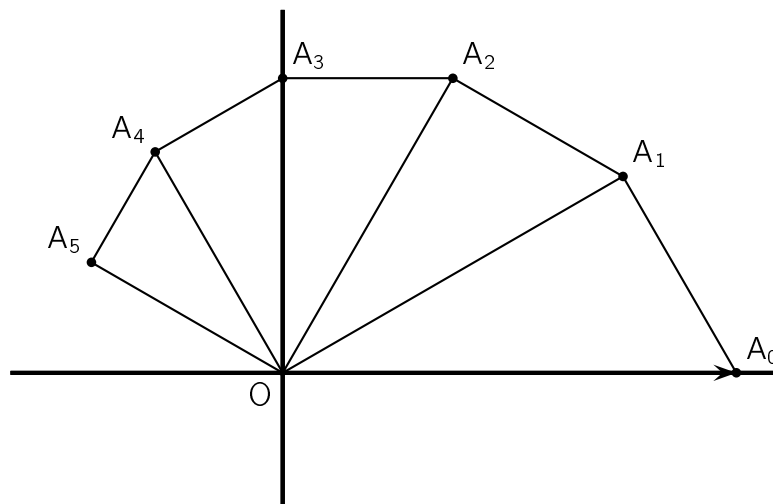
On définit la suite  $(r_n)$  par  $r_n = |z_n|$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe  $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ .
2.
  - a. Montrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique de raison  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
  - b. En déduire l'expression de  $r_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Que dire de la longueur  $OA_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	$n$ entier naturel $R$ réel $P$ réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de $P$
Traitement	$R$ prend la valeur 1 $n$ prend la valeur 0 Tant que $R > P$ $n$ prend la valeur $n + 1$ $R$ prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher $n$

- a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour  $P = 0,5$  ?
  - b. Pour  $P = 0,01$  on obtient  $n = 33$ . Quel est le rôle de cet algorithme ?
4.
  - a. Démontrer que le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$ .
  - b. On admet que  $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$ .  
 Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $A_n$  est un point de l'axe des ordonnées.
  - c. Compléter la figure ci-dessous en représentant les points  $A_6, A_7, A_8$  et  $A_9$ .  
 Les traits de construction seront apparents.



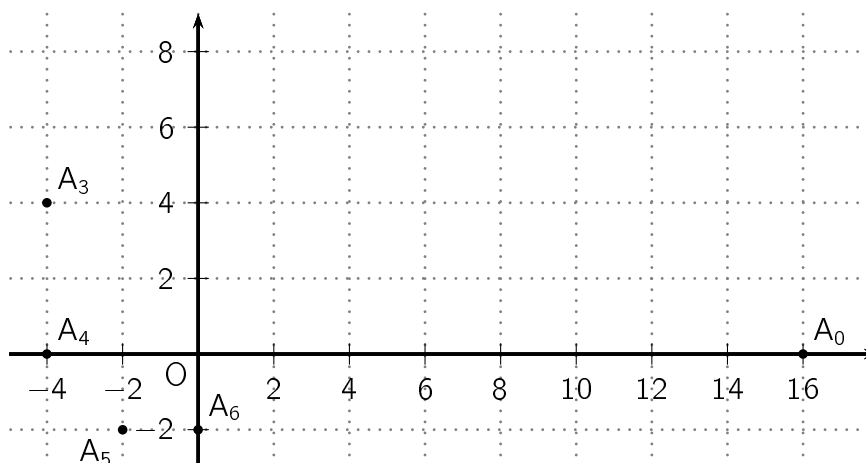
On définit, pour tout entier naturel  $n$ , les nombres complexes  $z$  par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2}z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note  $r_n$  le module du nombre complexe  $z_n$  :  $r_n = |z_n|$ .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine  $O$ , on considère les points  $A_n$  d'affixes  $z_n$ .

1. a. Calculer  $z_1, z_2$  et  $z_3$ .
- b. Placer les points  $A_1$  et  $A_2$  sur le graphique ci-dessous.



- c. Écrire le nombre complexe  $\frac{1+i}{2}$  sous forme trigonométrique.
  - d. Démontrer que le triangle  $OA_0A_1$  est isocèle rectangle en  $A_1$ .
2. Démontrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique, de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

La suite  $(r_n)$  est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note  $L_n$  la longueur de la ligne brisée qui relie le point  $A_0$  au point  $A_n$  en passant successivement par les points  $A_1, A_2, A_3$ , etc.

Ainsi 
$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$ .
- b. Donner une expression de  $L_n$  en fonction de  $n$ .
- c. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(L_n)$ .

On désigne par (E) l'équation  $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$  d'inconnue complexe  $z$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ .

Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par  $a$  le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à  $\frac{\pi}{3}$ .

Calculer  $a^2$  sous forme algébrique.

En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ . On écrira les solutions sous forme algébrique.

**3. Restitution organisée de connaissances**

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe  $z = x + iy$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ , le conjugué de  $z$  est le nombre complexe  $\bar{z}$  défini par  $\bar{z} = x - iy$ .

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .
- Pour tout nombre complexe  $z$  et tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ .

4. Démontrer que si  $z$  est une solution de l'équation (E) alors son conjugué  $\bar{z}$  est également une solution de (E).

En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.