

Complexes (2013)

◆ Exercice 1

(Pondichéry, avril 2013) 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA) , la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
 - a. Déterminer la forme algébrique de z_M .
 - b. Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.
Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
 - c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) en prenant 2 cm pour unité graphique.
Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.
 - a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y .
 - b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y .
 - c. Écrire les coordonnées des points I, B et M' .
 - d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM' .
 - e. Montrer que $BM' = 2OI$.

◆ Exercice 2

(Asie, juin 2013) 2 points

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i, \quad b = -\sqrt{3} + i, \quad c = 1 + i\sqrt{3}, \quad d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad e = -1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E .

◆ Exercice 3

(Antilles-Guyane, juin 2013) 5 points

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n , par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n , on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n) .

Partie A

1. Donner a_0 et b_0 .
2. Calculer z_1 , puis en déduire que $a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```

Variables : A et B des nombres réels
            K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                  Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur  $\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{3}$ 
    Affecter à B la valeur  $\frac{B}{3}$ 
FinPour
Afficher A
    
```

- a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

- b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n , exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n , et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n , et déterminer la limite de (b_n) .
3. a. On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Montrer que pour tout entier naturel n , $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$.

- b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

- c. Montrer que, pour tout entier naturel n , $|a_n| \leq u_n$.

En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

◆ Exercice 4

(Polynésie, juin 2013) 2 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des deux propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :

- (a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ (b) $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ (c) $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (d) $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z , admet :

- a. une solution
- b. deux solutions
- c. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
- d. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

◆ Exercice 5

(Métropole, juin 2013) 2 points

Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1** : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + 1|$ est une droite.
2. **Proposition 2** : Le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.

◆ Exercice 6

(Nouvelle-Calédonie, novembre 2013) 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

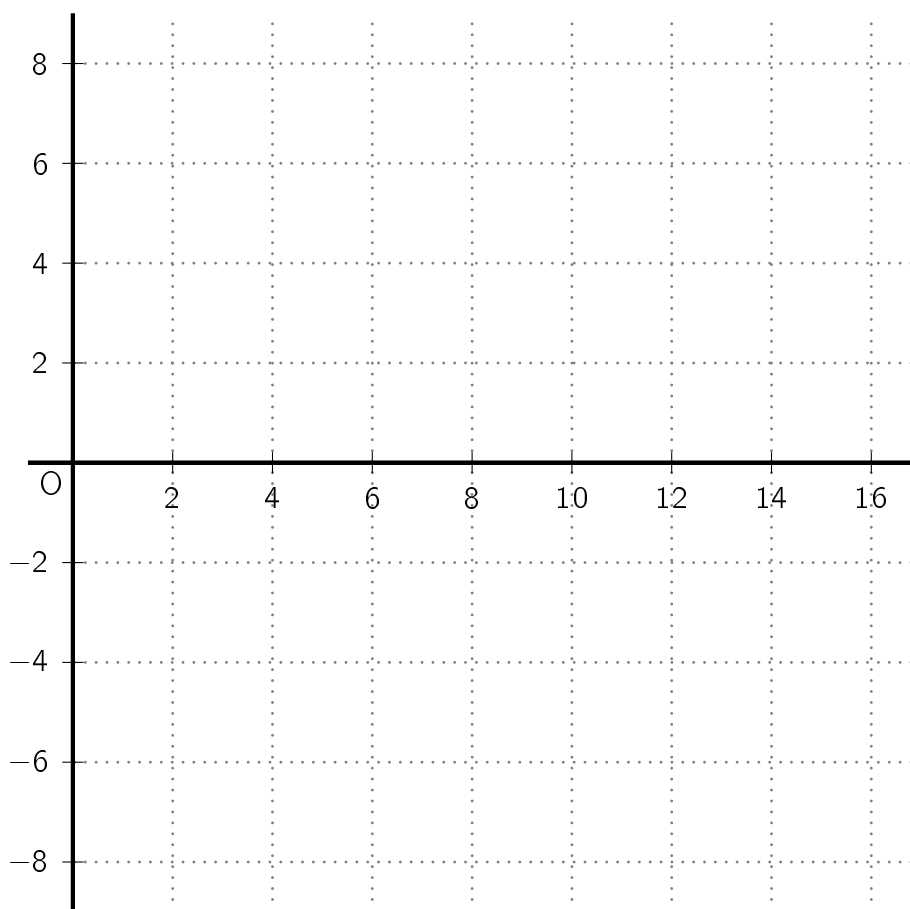
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans \mathbb{C} , de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α , $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha} \cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1 + i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition : si $n - 1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.
Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
 - a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
 - b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
 - c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure ci-dessous et tracer les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.



3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.

4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3 .

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$.

- a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
- b. Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1\,000$.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.

Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

Il est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O .

1. Soit \mathcal{E} l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + i| = |z - i|$.
 - a. \mathcal{E} est l'axe des abscisses.
 - b. \mathcal{E} est l'axe des ordonnées.
 - c. \mathcal{E} est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

2. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\frac{c}{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
 - a. Le triangle OBC est isocèle en O .
 - b. Les points O, B, C sont alignés.
 - c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B .