

## Version 3

**Question 1.** [4 points] Calculate

$$\text{a) } \int_{-3}^3 \frac{1}{y^2 - 16} dy \quad \text{b) } \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

**Solution.** a) We have

$$\frac{1}{y^2 - 16} = \frac{1}{(y - 4)(y + 4)} = \frac{a}{y - 4} + \frac{b}{y + 4} = \frac{(a + b)y + 4(a - b)}{(y - 4)(y + 4)},$$

with  $a + b = 0$  et  $4(a - b) = 1$ , which implies  $a = 1/8$  et  $b = -1/8$ .

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 \frac{1}{y^2 - 16} dy &= \frac{1}{8} \left( \int_{-3}^3 \frac{1}{y - 4} dy - \int_{-3}^3 \frac{1}{y + 4} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( [\ln|y - 4|]_{-3}^3 - [\ln|y + 4|]_{-3}^3 \right) \\ &= -\frac{1}{4} \ln(7) \end{aligned}$$

b) Soit  $y = \cos(x)$ , on a  $dy = -\sin(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx &= \int_{\cos(-\pi/2)}^{\cos(0)} -\frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= [-\arctan(y)]_0^1 \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

**Question 2.** [3 points] Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8t \sin t}{y}$$

avec la condition initiale  $y(0) = 3$ .

**Solution.** Premièrement nous séparons les variables, plaçons les  $y$  dans le membre de gauche et  $t$  dans le membre de droite, nous obtenons alors

$$\int y dy = \int 8t \sin t dt.$$

Le membre de gauche donne simplement :  $y^2/2$ . (Nous omettons la constante  $+C$  dans intégrale.)

Le membre de droite nécessite une intégration par parties. Soit  $u(t) = t$ ,  $v'(t) = \sin t$ , donc  $u'(t) = 1$ ,  $v(t) = -\cos t$ . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int 8t \sin t \, dt &= 8 \int t \sin t \, dt \\ &= 8 \left[ -t \cos t - \int (-\cos t) \, dt \right] \\ &= 8 [-t \cos t + \sin t] + C. \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation est donc

$$y^2/2 = 8 [-t \cos t + \sin t] + C;$$

la solution en  $y$  est

$$y = \pm \sqrt{16(-t \cos t + \sin t) + C}. \quad (*)$$

(La constante  $C$  n'est pas la même qu'à la ligne précédente. On devrait écrire  $+2C$  ou  $+D$  au lieu of  $+C$  dans l'équation (\*), avec  $D$  une constante arbitraire. )

Dans notre cas, il y a la condition initiale  $y(0) = 3$ . Avec  $t = 0$  dans l'équation (\*), on obtient

$$y(0) = \pm \sqrt{16(0 + 0) + C} = \pm \sqrt{C}$$

Donc  $\pm \sqrt{C} = 3$ . Clairement grâce à la valeur 3, nous devons choisir la racine positive et nous obtenons alors  $C = 9$ . La solution de notre équation différentielle avec la condition initiale est

$$\boxed{y = \sqrt{16(-t \cos t + \sin t) + 9}}.$$

**Question 3.** [4 points] Calculer

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 18x + 2}{x^2 + x - 12} \, dx.$$

**Solution.**  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 18x + 2$ , et  $Q(x) = x^2 + x - 12$ . Comme  $\deg(P) = 3 > 2 = \deg(Q)$ . Une division est nécessaire, nous trouvons que

$$x^3 + 2x^2 - 18x + 2 = (x + 1)(x^2 + x - 12) + (-7x + 14)$$

et

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 18x + 2}{x^2 + x - 12} = (x + 1) + \frac{-7x + 14}{x^2 + x - 12}$$

De plus, on a  $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$ . Il existe 2 nombres  $A$  et  $B$  tel que

$$\frac{-7x + 14}{(x + 4)(x - 3)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 4)}{(x + 4)(x - 3)} = \frac{(A + B)x + (-3A + 4B)}{(x + 4)(x - 3)}$$

En comparant les coefficients des numérateurs, on obtient

$$\begin{aligned} A + B &= -7, \\ -3A + 4B &= 14. \end{aligned}$$

Cela implique que  $A = -6$  et  $B = -1$ . Finalement,

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 18x + 2}{x^2 + x - 12} dx = \int \left[ (x + 1) + \frac{-6}{x + 4} + \frac{-1}{x - 3} \right] dx = \frac{1}{2}x^2 + x - 6 \ln |x + 4| - \ln |x - 3| + C$$

**Question 4.** [6 points] Pour chaque intégrale déterminer, si elle converge et si c'est le cas calculer sa valeur.

$$\text{a) } \int_1^5 \frac{1}{t \ln t} dt \qquad \text{b) } \int_0^\infty \frac{5}{32 + 2t^2} dt \qquad \text{c) } \int_3^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$$

**Solution.** a) Par changement de variable, on a

$$\begin{aligned} u &= \ln t \\ \frac{du}{dt} &= \frac{1}{t} \\ dt &= t du \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{dt}{t \ln t} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^+} \int_{t=\epsilon}^{t=5} \frac{1}{u} du \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^+} [\ln |u|]_{t=\epsilon}^{t=5} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^+} [\ln |\ln t|]_\epsilon^5 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^+} \ln |\ln 5| - \ln |\ln \epsilon| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale diverge.

b)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{5}{32 + 2t^2} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{5}{32 + 2t^2} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{5}{32} \int_0^T \frac{1}{1 + t^2/16} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{5}{32} \int_0^T \frac{1}{1 + (t/4)^2} dt \end{aligned}$$

Soit  $u = t/4$  donc  $dt = 4 du$ , on a alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{5}{32 + 2t^2} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{5}{8} \int_{t=0}^{t=T} \frac{1}{1 + u^2} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{5}{8} \arctan u \Big|_{t=0}^{t=T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{5}{8} \arctan(t/4) \Big|_0^T \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{5}{8} \arctan(T/4) - \frac{5}{8} \arctan(0) \\
 &= \frac{5}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{5\pi}{16}
 \end{aligned}$$

c)

$$\int_3^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_3^T \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Par changement de variable, on a

$$\begin{aligned}
 u &= \ln x \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \\
 dx &= x du
 \end{aligned}$$

Alors

$$\int_3^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x=3}^{x=T} \frac{u}{x} du$$

Nous devons effectuer de nouveau un changement de variable. Soit  $u = \ln x$ , il en résulte que  $x = e^u$ . Donc

$$\int_3^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x=3}^{x=T} u e^{-u} du.$$

Par intégration par parties,  $w = u$  et  $v' = e^{-u}$ , on a donc

$$\begin{aligned}
 \int_3^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -u e^{-u} + \int e^{-u} du \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -u e^{-u} - e^{-u} \right]_{x=3}^{x=T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\ln x e^{-\ln x} - e^{-\ln x} \right]_3^T \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_3^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln T}{T} - \frac{1}{T} \right] - \left[ -\frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{3} \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1/T}{1} - \frac{1}{T} \right] - \left[ -\frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{3} \right] \quad (\text{en utilisant la règle de L'Hôpital}) \\
&= [0 - 0] - \left[ -\frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{3} \right] \\
&= \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

L'intégrale converge.

**Question 5.** [4 points] Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x) = 3x^2 \qquad g = -3x + 6$$

- a) Montrer que les courbes de  $f$  et  $g$  se coupent aux points  $x = -2$  et  $x = 1$ .  
b) Calculer l'aire entre les courbes de  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $-3 \leq x \leq 4$ .

**Solution.** a) Les points d'intersection des courbes de  $f$  et  $g$  satisfont

$$f(x) - g(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2) = 3(x - 1)(x + 2) = 0.$$

Donc  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -2$  sont les seuls points d'intersection.

b) Nous avons  $a < -2$  et  $b > 1$ . Nous calculons l'aire entre les courbes de  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . On a donc

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |3x^2 + 3x - 6| dx = 3 \int_a^b |(x - 1)(x + 2)| dx.$$

La fonction  $(x - 1)(x + 2)$  est négative pour  $-2 < x < 1$ . Donc

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\
&= 3 \left( \int_a^{-2} (x - 1)(x + 2) dx + \int_{-2}^1 -(x - 1)(x + 2) dx + \int_1^b (x - 1)(x + 2) dx \right) \\
&= 3 \left( \int_a^{-2} (x^2 + x - 2) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx + \int_1^b (x^2 + x - 2) dx \right) \\
&= 3 \left( \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_a^{-2} - \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 + \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^b \right) \\
&= 3 \left( 2 \left( -\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left( \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - 2a \right) - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) + \left( \frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} - 2b \right) \right) \\
&= 27 + 3 \left( -\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + 2a + \frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} - 2b \right).
\end{aligned}$$

En substituant les valeurs de  $a$  et  $b$  dans l'expression, nous obtenons

$$\int_{-3}^4 |f(x) - g(x)| dx = \boxed{86.5}.$$

**Question 6.** [4 points] a) Un serpent maigrelet de 3 mètre de long a une densité  $\rho(x)$  kg/m à la distance  $x$  depuis sa tête, où

$$\rho(x) = 20x - x^2.$$

Calculer la masse totale du serpent.

b) Un autre serpent de 4 mètre de long a un corps donné par la rotation de

$$y = \frac{e^{-x/7}}{10}, \quad 0 \leq x \leq 4$$

autour de l'axe des  $x$  ( $y$  en mètre). Calculer le volume du serpent.

**Solution.** a) La masse totale du serpent est

$$\int_0^3 \rho(x) dx = \int_0^3 (20x - x^2) dx = (10x^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^3 = 90 - \frac{27}{3} = 81 \text{ kg.}$$

b) Le volume du serpent est

$$\begin{aligned} \int_0^4 \pi [y(x)]^2 dx &= \int_0^4 \pi \left[ \frac{e^{-x/7}}{10} \right]^2 dx \\ &= \int_0^4 \pi \frac{e^{-2x/7}}{100} dx = \frac{\pi}{100} \int_0^4 e^{-2x/7} dx = \frac{\pi}{100} (-\frac{7}{2} e^{-2x/7}) \Big|_0^4 = \frac{7\pi}{200} (-e^{-8/7} + e^0) = \frac{7\pi}{200} (1 - e^{-8/7}) \text{ m}^3 \end{aligned}$$

**Question 7.** [5 points] Déterminer la valeur moyenne de  $f(x) = x \ln(x)$  sur l'intervalle  $0 \leq x \leq 6$ .

**Solution.** La valeur moyenne de  $x \ln(x)$  sur l'intervalle est donnée par

$$\frac{\int_0^6 x \ln(x) dx}{6 - 0} = \frac{1}{6} \int_0^6 x \ln(x) dx. \quad (*)$$

L'intégrale est impropre car  $\ln(x)$  est non définie en  $x = 0$ ; on doit donc calculer

$$\begin{aligned} \int_0^6 x \ln(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^6 x \ln(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_a^6 - \int_a^6 \frac{x^2/2}{x} dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_a^6 - \int_a^6 \frac{x}{2} dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_a^6 \\
&= (18 \ln 6 - 9) - \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} \right) \\
&= (18 \ln 6 - 9) - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 \ln a,
\end{aligned}$$

où nous appliquons une intégration par parties avec  $u = \ln x$ ,  $v = x$ . ( $a^2/4$  tend vers 0, quand  $a$  tend vers 0)

Évaluons la limite restante en utilisant la règle de L'Hôpital. On arrange l'expression pour pouvoir l'appliquer

$$a^2 \ln a = \frac{\ln a}{a^{-2}}.$$

Comme  $a$  tend vers 0 (par valeurs positives), le dénominateur tend vers l'infini, les conditions d'application de la règle de L'Hôpital sont vérifiées et on conclut que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln a}{a^{-2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1/a}{-2a^{-3}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} -\frac{a^2}{2} = 0.$$

Comme  $\lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 \ln a = 0$ , l'intégrale impropre a pour valeur  $2 \ln 2 - 1$ , et la valeur moyenne de la fonction donnée en (\*) est  $(18 \ln 6 - 9)/6 = \boxed{3 \ln 6 - 3/2}$