

Version 2

Question 1. [4 points] Calculate

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \frac{1}{y^2 - 4} dy \quad \text{b) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

Solution. a) We have

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{(y - 2)(y + 2)} = \frac{a}{y - 2} + \frac{b}{y + 2} = \frac{(a + b)y + 2(a - b)}{(y - 2)(y + 2)},$$

with $a + b = 0$ et $2(a - b) = 1$, which implies $a = 1/4$ et $b = -1/4$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{y^2 - 4} dy &= \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{y - 2} dy - \int_{-1}^1 \frac{1}{y + 2} dy \right) \\ &= \frac{1}{4} ([\ln|y - 2|]_{-1}^1 - [\ln|y + 2|]_{-1}^1) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(3) \end{aligned}$$

b) Soit $y = \cos(x)$, on a $dy = -\sin(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx &= \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/2)} -\frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= \int_1^0 -\frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= [-\arctan(y)]_1^0 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Question 2. [3 points] Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4t \sin t}{y}$$

avec la condition initiale $y(0) = 7$.

Solution. Premièrement nous séparons les variables, plaçons les y dans le membre de gauche et t dans le membre de droite, nous obtenons alors

$$\int y dy = \int 4t \sin t dt.$$

Le membre de gauche donne simplement : $y^2/2$. (Nous omettons la constante $+C$ dans l'intégrale.)

Le membre de droite nécessite une intégration par parties. Soit $u(t) = t$, $v'(t) = \sin t$, donc $u'(t) = 1$, $v(t) = -\cos t$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int 4t \sin t \, dt &= 4 \int t \sin t \, dt \\ &= 4 \left[-t \cos t - \int (-\cos t) \, dt \right] \\ &= 4[-t \cos t + \sin t] + C. \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation est donc

$$y^2/2 = 4[-t \cos t + \sin t] + C;$$

la solution en y est

$$y = \pm \sqrt{8(-t \cos t + \sin t) + C}. \quad (*)$$

(La constante C n'est pas la même qu'à la ligne précédente. On devrait écrire $+2C$ ou $+D$ au lieu of $+C$ dans l'équation (*), avec D une constante arbitraire.)

Dans notre cas, il y a la condition initiale $y(0) = 7$. Avec $t = 0$ dans l'équation (*), on obtient

$$y(0) = \pm \sqrt{8(0 + 0) + C} = \pm \sqrt{C}$$

Donc $\pm \sqrt{C} = 7$. Clairement grâce à la valeur 7, nous devons choisir la racine positive et nous obtenons alors $C = 49$. La solution de notre équation différentielle avec la condition initiale est

$$\boxed{y = \sqrt{8(-t \cos t + \sin t) + 49}}.$$

Question 3. [4 points] Calculer

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 18x + 2}{x^2 + x - 12} \, dx.$$

Solution. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 18x + 2$, et $Q(x) = x^2 + x - 12$. Comme $\deg(P) = 3 > 2 = \deg(Q)$. Une division est nécessaire, nous trouvons que

$$x^3 + 2x^2 - 18x + 2 = (x + 1)(x^2 + x - 12) + (-7x + 14)$$

et

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 18x + 2}{x^2 + x - 12} = (x + 1) + \frac{-7x + 14}{x^2 + x - 12}$$

De plus, on a $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$. Il existe 2 nombres A et B tel que

$$\frac{-7x + 14}{(x + 4)(x - 3)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 4)}{(x + 4)(x - 3)} = \frac{(A + B)x + (-3A + 4B)}{(x + 4)(x - 3)}$$

En comparant les coefficients des numérateurs, on obtient

$$\begin{aligned} A + B &= -7, \\ -3A + 4B &= 14. \end{aligned}$$

Cela implique que $A = -6$ et $B = -1$. Finalement,

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 18x + 2}{x^2 + x - 12} dx = \int \left[(x + 1) + \frac{-6}{x + 4} + \frac{-1}{x - 3} \right] dx = \frac{1}{2}x^2 + x - 6 \ln |x + 4| - \ln |x - 3| + C$$

Question 4. [6 points] Pour chaque intégrale déterminer, si elle converge et si c'est le cas calculer sa valeur.

$$\text{a) } \int_1^4 \frac{1}{t \ln t} dt \qquad \text{b) } \int_0^\infty \frac{3}{8 + 2t^2} dt \qquad \text{c) } \int_4^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Solution. a) Par changement de variable, on a

$$\begin{aligned} u &= \ln t \\ \frac{du}{dt} &= \frac{1}{t} \\ dt &= t du \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dt}{t \ln t} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^+} \int_{t=\epsilon}^{t=4} \frac{1}{u} du \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^+} [\ln |u|]_{t=\epsilon}^{t=4} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^+} [\ln |\ln t|]_{\epsilon}^4 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^+} \ln |\ln 4| - \ln |\ln \epsilon| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale diverge.

b)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{3}{8 + 2t^2} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{3}{8 + 2t^2} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3}{8} \int_0^T \frac{1}{1 + t^2/4} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3}{8} \int_0^T \frac{1}{1 + (t/2)^2} dt \end{aligned}$$

Soit $u = t/2$ et donc $dt = 2 du$, on a alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{3}{8+2t^2} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \int_{t=0}^{t=T} \frac{1}{1+u^2} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \arctan u \Big|_{t=0}^{t=T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \arctan(t/2) \Big|_0^T \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \arctan(T/2) - \frac{3}{4} \arctan(0) \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{3\pi}{8}
 \end{aligned}$$

c)

$$\int_4^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_4^T \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Par changement de variable, on a

$$\begin{aligned}
 u &= \ln x \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \\
 dx &= x du
 \end{aligned}$$

Alors

$$\int_4^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x=4}^{x=T} \frac{u}{x} du$$

Nous devons effectuer de nouveau un changement de variable. Soit $u = \ln x$, il en résulte que $x = e^u$. Donc

$$\int_4^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x=4}^{x=T} u e^{-u} du.$$

Par intégration par parties, $w = u$ et $v' = e^{-u}$, on a donc

$$\begin{aligned}
 \int_4^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-u e^{-u} + \int e^{-u} du \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-u e^{-u} - e^{-u} \right]_{x=4}^{x=T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\ln x e^{-\ln x} - e^{-\ln x} \right]_4^T \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_4^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln T}{T} - \frac{1}{T} \right] - \left[-\frac{\ln 4}{4} - \frac{1}{4} \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1/T}{1} - \frac{1}{T} \right] - \left[-\frac{\ln 4}{4} - \frac{1}{4} \right] \quad (\text{en utilisant la règle de L'Hôpital}) \\
&= [0 - 0] - \left[-\frac{\ln 4}{4} - \frac{1}{4} \right] \\
&= \frac{\ln 4}{4} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

L'intégrale converge.

Question 5. [4 points] Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = 3x^2 \qquad g = -3x + 6$$

- a) Montrer que les courbes de f et g se coupent aux points $x = -2$ et $x = 1$.
b) Calculer l'aire entre les courbes de f et g sur l'intervalle $-3 \leq x \leq 3$.

Solution. a) Les points d'intersection des courbes de f et g satisfont

$$f(x) - g(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2) = 3(x - 1)(x + 2) = 0.$$

Donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ sont les seuls points d'intersection.

b) Nous avons $a < -2$ et $b > 1$. Nous calculons l'aire entre les courbes de f et g sur l'intervalle $[a, b]$. On a donc

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |3x^2 + 3x - 6| dx = 3 \int_a^b |(x - 1)(x + 2)| dx.$$

La fonction $(x - 1)(x + 2)$ est négative pour $-2 < x < 1$. Donc

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\
&= 3 \left(\int_a^{-2} (x - 1)(x + 2) dx + \int_{-2}^1 -(x - 1)(x + 2) dx + \int_1^b (x - 1)(x + 2) dx \right) \\
&= 3 \left(\int_a^{-2} (x^2 + x - 2) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx + \int_1^b (x^2 + x - 2) dx \right) \\
&= 3 \left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_a^{-2} - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^b \right) \\
&= 3 \left(2 \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - 2a \right) - 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) + \left(\frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} - 2b \right) \right) \\
&= 27 + 3 \left(-\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + 2a + \frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} - 2b \right).
\end{aligned}$$

En substituant les valeurs de a et b dans l'expression, nous obtenons

$$\int_{-3}^3 |f(x) - g(x)| dx = \boxed{45}.$$

Question 6. [4 points] a) Un serpent maigrelet de 5 mètre de long a une densité $\rho(x)$ kg/m à la distance x depuis sa tête, où

$$\rho(x) = 20x - x^2.$$

Calculer la masse totale du serpent.

b) Un autre serpent de 2 mètre de long a un corps donné par la rotation de

$$y = \frac{e^{-x/5}}{10}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

autour de l'axe des x (y en mètre). Calculer le volume du serpent.

Solution. a) La masse totale du serpent est

$$\int_0^5 \rho(x) dx = \int_0^5 (20x - x^2) dx = \left(10x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^5 = 10 * 5^2 - \frac{5^3}{3} = 625/3 \text{ kg}.$$

b) Le volume du serpent est

$$\begin{aligned} \int_0^2 \pi [y(x)]^2 dx &= \int_0^2 \pi \left[\frac{e^{-x/5}}{10}\right]^2 dx \\ &= \int_0^2 \pi \frac{e^{-2x/5}}{100} dx = \frac{\pi}{100} \int_0^2 e^{-2x/5} dx = \frac{\pi}{100} \left(-\frac{5}{2} e^{-2x/5}\right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{\pi}{40} (-e^{-4/5} + e^0) = \frac{\pi}{40} (1 - e^{-4/5}) \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Question 7. [5 points] Déterminer la valeur moyenne de $f(x) = x \ln(x)$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq 4$.

Solution. La valeur moyenne de $x \ln(x)$ sur l'intervalle est donnée par

$$\frac{\int_0^4 x \ln(x) dx}{4 - 0} = \frac{1}{4} \int_0^4 x \ln(x) dx. \quad (*)$$

L'intégrale est impropre car $\ln(x)$ est non définie en $x = 0$; on doit donc calculer

$$\begin{aligned} \int_0^4 x \ln(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^4 x \ln(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_a^4 - \int_a^4 \frac{x^2/2}{x} dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_a^4 - \int_a^4 \frac{x}{2} dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_a^4 \\
&= (8 \ln 4 - 4) - \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} \right) \\
&= (8 \ln 4 - 4) - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 \ln a,
\end{aligned}$$

où nous appliquons une intégration par parties avec $u = \ln x$, $v = x$. ($a^2/4$ tend vers 0, quand a tend vers 0)

Évaluons la limite restante en utilisant la règle de L'Hôpital. On arrange l'expression pour pouvoir l'appliquer

$$a^2 \ln a = \frac{\ln a}{a^{-2}}.$$

Comme a tend vers 0 (par valeurs positives), le dénominateur tend vers l'infini, les conditions d'application de la règle de L'Hôpital sont vérifiées et on conclut que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln a}{a^{-2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1/a}{-2a^{-3}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} -\frac{a^2}{2} = 0.$$

Comme $\lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 \ln a = 0$, l'intégrale impropre a pour valeur $8 \ln 4 - 4$, et la valeur moyenne de la fonction donnée en (*) est $2 \ln 4 - 1 = \boxed{2 \ln 4 - 1}$