

DGD9bis, Mardi, le 16 mars 2010

Nombres complexes

Exercice 1:

Soient

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 2 + i, \quad z_3 = 3 + 4i, \quad z_4 = 4 - 3i, \quad z_5 = i$$

- a) Exprimer les formes cartésiennes de $z_1 + z_3$, $z_1 z_2$, z_1/z_2 , z_1^2 et z_4/z_3 , puis calculer leur module.
- b) Exprimer la forme polaire de z_1 , z_4/z_3 et z_5 .

Exercice 2:

Résoudre dans \mathbb{C}

- a) $z^2 + 8z + 25 = 0$
- b) $z^2 + 5 = 0$
- c) $z^3 + 2z - 3 = 0$

Correction

Exercice 1:

a) $z_1 + z_3 = 1 + i + 3 + 4i = 4 + 5i$ et $|z_1 + z_3| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

$$z_1 z_2 = (1+i)(2+i) = 2+i+2i+i^2 = 1+3i \quad \text{et} \quad |z_1 z_2| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \quad \text{et} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$z_1^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i \quad \text{et} \quad |z_1^2| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$z_4/z_3 = \frac{4-3i}{3+4i} = \frac{(4-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{-25i}{25} = -i \quad \text{et} \quad \left| \frac{z_4}{z_3} \right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

b) La forme polaire est $r e^{i\theta}$ avec r le module et θ argument (géométriquement, c'est l'angle).

On a $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, si on trace le point sur le plan, on trouve $\theta = \pi/4$.

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

On a $|z_4/z_3| = 1$, si on trace le point sur le plan, on trouve $\theta = -\pi/2$.

$$z_4/z_3 = 1 \cdot e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/2}.$$

On a $|z_5| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, si on trace le point sur le plan, on trouve $\theta = \pi/2$.

$$z_4/z_3 = 1 \cdot e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}.$$

Exercice 2:

a) $z^2 + 8z + 25 = 0$

$$8^2 - 4 \cdot 25 = -36 = (6i)^2$$

On a donc

$$z = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

b) $z^2 + 5 = 0$

$$z = \pm\sqrt{5}i$$

c) $z^3 + 2z - 3 = 0$

1 est racine évidente, on a donc

$$z^3 + 2z - 3 = (z - 1)(z^2 + z + 3)$$

On cherche donc les racines de $z^2 + z + 3$

$$1^2 - 4 \cdot 3 = -11 = (i\sqrt{11})^2$$

Il y a donc 3 racines pour $z^3 + 2z - 3 = 0$

$$z = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$$