

DGD9, Mardi, le 16 mars 2010

Un complément du cours

1. Calculer le déterminant de A en faisant attention au choix de la ligne.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminant, inverse, solution d'un système linéaire avec une matrice de coefficients carrée et inversible

2. On a introduit dans une île trois espèces différentes d'écureuils: l'écureuil commun, le tamia et l'écureuil volant du Sud. La population initiale totale, composée de 2 000 bêtes, s'est accrue à 2 500 bêtes dix ans plus tard: le nombre des écureuils communs a doublé, celui des tamias a augmenté de 50% et l'écureuil volant du Sud s'est éteint. Sachant que l'accroissement des écureuils communs est égal (en nombre) à celui des tamias, déterminer le nombre d'individus de chaque espèce qui furent introduits dans l'île en suivant les étapes suivantes:

- Écrire le système linéaire sous forme algébrique et ensuite sous forme matricielle.
- Vérifier que la matrice de coefficients A est inversible et calculer son inverse. (Vérifier votre réponse)
- Trouver la solution en utilisant A^{-1} . (Vérifier la réponse)

Déterminant, inverse

3. Voici la matrice de rotation R .

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Quand on veut faire la rotation d'un vecteur v (de dimension 2×1) par un angle θ , on n'a qu'à effectuer l'opération Rv .

Question: Montrer que R est inversible. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est l'inverse de R . Que pensez-vous que la matrice R^{-1} fait sur un vecteur? (Interpréter géométriquement...)

Système homogène important à résoudre: l'équilibre d'un système dynamique discret linéaire 2D

4. Deux composés chimiques X et Y (de quantité x_t et y_t où t est le temps) dans un tube à essai obéissent à la loi:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.9 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

- Montrer que pour trouver le point d'équilibre $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$, on doit résoudre un système homogène. (Rappel: les systèmes homogènes ont toujours au moins une solution, cela veut dire que le SDD aura un équilibre.)
- Bien entendu, les points d'équilibres qui nous intéressent sont ceux différents de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le système homogène à résoudre pour trouver les équilibres possède des solutions non triviales.
- Trouver les valeurs propres et vecteur propres associés à ce système.
- La quantité en x initiale est 1000 et celle en y 2000, exprimer x_t et y_t en fonction de t .