

Systèmes d'équations linéaires

1. Identifier les matrices qui sont sous la forme échelonnée réduite.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse, quand c'est possible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Pour chacun des systèmes linéaires suivants:
- Écrire la matrice augmentée correspondante.
 - Transformer la matrice augmentée en une forme échelonnée réduite équivalente (avec la méthode de Gauss-Jordan).
 - En utilisant la notion de rang, indiquer si le système est compatible ou non. Indiquer la nature des solutions (solution unique, infinité de solutions ou aucune solution).
 - Résoudre le système et écrire la solution.

$$\begin{array}{l} 2v - 4w + x + y + z = 3 \\ v - 2w + x + z = 2 \\ 2v - 4w + 3x - y + 7z = 5 \\ -3v + 6w - 3y - 17z = -3 \end{array} \quad \text{a) } \quad \begin{array}{l} x + y - z = 7 \\ 4x - y + 5z = 4 \\ 6x + y + 3z = 20 \end{array} \quad \text{b) }$$

$$\begin{aligned}
 & x - 2y + 3z = 11 \\
 \text{c)} \quad & 4x + y - z = 4 \\
 & 2x - y + 3z = 10 \\
 & 9x - 3y + 8z = 35
 \end{aligned}$$

4. Soient c et d deux nombres réels et soit le système d'équations linéaires:

$$\begin{aligned}
 cx + y &= -1 \\
 2x + y &= d
 \end{aligned}$$

a) Donner la matrice augmentée $(A|b)$ de ce système.

b) Calculer $\text{rang}(A)$ et $\text{rang}(A|b)$.

Note: En appliquant la méthode de Gauss-Jordan pour transformer la matrice augmentée en une matrice équivalente pour trouver le nombre de lignes non nulles, ATTENTION: ne pas diviser par une expression qui contient les nombres c et d car cela pourrait occasionner une division par 0!!!

c) En utilisant la réponse de b), trouver pour quelles valeurs de c et d on a un système

- incompatible,
- compatible avec une solution unique,
- compatible avec une infinité de solutions.