

DGD, Mardi 2 mars 2010

Question 1

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculer quand c'est possible et justifier pourquoi quand c'est impossible.

a) $A + 2CB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $D - BC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $AC + (DC)^T$

Le produit DC n'est pas défini.

d) $BA + DE$

Les produits BA et DE sont bien définis, mais ne donnent pas des matrices de même dimensions donc la somme n'est pas possible.

e) $(DE)^T - 3CF$

Le produit CF n'est pas défini.

f) $A(CD - B^T)E = \begin{pmatrix} -44 \\ 29 \end{pmatrix}$

g) $B(AFF^T - B^TC^T)C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

h) $DAE + ACE$

Le produit DA n'est pas défini.

i) $A(B^TC^T - CB)CDE = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix}$

j) $2AF + 3B^TDE = \begin{pmatrix} -50 \\ 43 \end{pmatrix}$

k) $(AB^TCD)^T + 2(DEE^TB - 7C^TA^T)^T$

Le produit B^TC n'est pas défini.

Question 2

Évaluer pour les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

les quantités :

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, b) $\vec{a} \times \vec{b}$, c) $(-\vec{b}) \times \vec{a}$, d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Solution:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$

b) $\vec{a} \times \vec{b} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $(-\vec{b}) \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$

Question 3

On considère les points $O = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 2, 2)$ et $P_2 = (2, 1, -2)$, la droite g_1 qui passe par O et P_1 , ainsi que la droite g_2 qui passe par O et P_2 .

- a) Montrer que les droites g_1 et g_2 sont orthogonales.
 b) Trouver une droite g_3 qui coupe les droites g_1 et g_2 en point O orthogonalement.
 c) Déterminer l'angle entre les droites g_1 et g_4 qui passe par O et $Q = (3, 4, 5)$ en point O .

Solution:

a) On a $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Car $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$ les droites sont orthogonales.

b) On a $\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. La droite $g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ est alors orthogonale à g_1 et g_2 et ainsi passe par O .

c) Soit $q = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. On calcule $\cos \alpha = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{q}}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{q}\|} = \frac{21}{3\sqrt{50}}$. Alors $\alpha \approx 8.13^\circ$.

Question 4

a) Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 7 \\ 2x + 5y &= 1. \end{aligned}$$

b) Montrer que le système

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \quad (\text{i}) \\ x + z &= b \quad (\text{ii}) \\ 2x + y + 3z &= c \quad (\text{iii}) \end{aligned}$$

possède au moins une solution seulement si $c = a + b$.

c) Résoudre

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

d) Montrer que le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \quad (\text{i}) \\ 2x + y + z &= 1 \quad (\text{ii}) \\ 3x + 3y + 2z &= 1 \quad (\text{iii}) \end{aligned}$$

n'a pas de solutions.

Solution:

a) $x = \frac{32}{19}, y = \frac{-9}{19}$. Pour plus de détails voir le manuel du cours, p.111/112, exemple 10.1.1 e).

b) La somme des équations (i) et (ii) donnent l'équation (iii). Si on a $c = a + b$ il existe un nombre infini de solutions $\vec{x} = (t, t + a - 2b, b - t)$, $t \in \mathbb{R}$. Sinon l'équation (iii) est une contradiction à les équations (i) et (ii), alors il n'existe pas de solution.

c) $\vec{x} = (11/12, -7/12, -5/12)$.

d) Si on additionne (i) et (ii), on trouve $3x + 3y + 2z = 2$. Cela est une contradiction à (iii). Voir aussi le manuel du cours, p.119/120, exemple 10.1.9.