

DGD, Mardi 1er mars 2010

Question 1

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculer quand c'est possible et justifier pourquoi quand c'est impossible.

a) $A + 2CB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $D - BC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $AC + (DC)^T$

Le produit DC n'est pas défini.

d) $BA + DE$

Les produits BA et DE sont bien définis, mais ne donnent pas des matrices de même dimensions donc la somme n'est pas possible.

e) $(DE)^T - 3CF$

Le produit CF n'est pas défini.

f) $A(CD - B^T)E = \begin{pmatrix} -44 \\ 29 \end{pmatrix}$

g) $B(AFF^T - B^TC^T)C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

h) $DAE + ACE$

Le produit DA n'est pas défini.

i) $A(B^TC^T - CB)CDE = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix}$

j) $2AF + 3B^TDE = \begin{pmatrix} -50 \\ 43 \end{pmatrix}$

k) $(AB^TCD)^T + 2(DEE^TB - 7C^TA^T)^T$

Le produit B^TC n'est pas défini.

Question 2

Évaluer pour les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

les quantités :

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$,
- b) $\vec{a} \times \vec{b}$,
- c) $(-\vec{b}) \times \vec{a}$,
- d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$,
- e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Question 3

On considère les points $O = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 2, 2)$ et $P_2 = (2, 1, -2)$, la droite g_1 qui passe par O et P_1 , ainsi que la droite g_2 qui passe par O et P_2 .

- a) Montrer que les droites g_1 et g_2 sont orthogonales.
- b) Trouver une droite g_3 qui coupe les droites g_1 et g_2 en point O orthogonalement.
- c) Déterminer l'angle entre les droites g_1 et g_4 qui passe par O et $Q = (3, 4, 5)$.

Question 4

a) Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}5x + 3y &= 7 \\ 2x + 5y &= 1.\end{aligned}$$

b) Montrer que le système

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= a \quad (\text{i}) \\ x + z &= b \quad (\text{ii}) \\ 2x + y + 3z &= c \quad (\text{iii})\end{aligned}$$

possède au moins une solution seulement si $c = a + b$.

c) Résoudre

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0.\end{aligned}$$

d) Montrer que le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 1 \quad (\text{i}) \\ 2x + y + z &= 1 \quad (\text{ii}) \\ 3x + 3y + 2z &= 1 \quad (\text{iii})\end{aligned}$$

n'a pas de solutions.