

Applications des équations différentielles, champs de pentes

1) Une citerne contient 1000 litres d'eau pure. Une solution d'eau salée avec une concentration de 0.05 Kg/L est versée dans la citerne avec un débit de 5 L/min. Une autre solution de concentration 0.04 kg/L est aussi versée dans la citerne à un taux de 10 L/min. En supposant que le contenu de la citerne est toujours bien mélangé et que la citerne perd de son contenu à un débit de 15 L/min,

- écrire le modèle pour la quantité de sel Q présente dans citerne. Quelle est la condition initiale?
- Tracer le portrait de phase, en indiquant clairement la stabilité des points d'équilibre.
- Calculer la solution (séparation de variable).

2) Un thermomètre qui sort d'une pièce où il fait 20°C est placé à l'extérieur où la température n'est que de 5°C. Après une minute, il indique 12°C. On veut modéliser la température du thermomètre après t minutes. Écrire l'équation différentielle pour ce modèle (indice: suivre les étapes suivantes).

- Écrire le modèle en laissant la constante de conductivité égale à k . Quelle est la condition initiale?
- Résoudre l'équation différentielle en laissant la constante k .
- Trouver k en utilisant le fait que $y(1) = 12$

3) Des biologistes ontensemencés un lac artificiel avec 400 poissons et estiment que la capacité maximale du lac est de 10 000 poissons. Le nombre de poissons a triplé la première année. Écrire l'équation différentielle pour ce modèle (indice: suivre les étapes suivantes).

- Écrire le modèle en laissant la constante de reproduction relative égale à k .
- Résoudre l'équation différentielle en laissant la constante k .
- Trouver k en utilisant le fait que $y(1) = 1200$. Indice: Utiliser la solution du dernier DGD, i.-e. que pour une capacité maximale de M , une

condition initiale de $y(0) = y_0$, on obtient

$$y(t) = \frac{M}{1 + \left(\frac{M-y_0}{y_0}\right) e^{-kMt}}.$$

- Tracer quelques solutions dans le champ de pentes et commenter. Indiquer clairement les points d'équilibre et les endroits où le taux de croissance ou de décroissance est maximal (on recherche un maximum local, i.e. un point d'inflexion).

FIG. 1 – *Champ de pente pour la population de poissons du numéro 3).*

