

DGD4, Mardi, le 2 février 2010

Intégrales impropres (suite) et applications

1) Résoudre

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \tan(x) dx$$

Problème en $x = \pi/2$, on calcule donc

$$\lim_{\substack{a \rightarrow (\pi/2)^- \\ b \rightarrow (\pi/2)^+}} \int_{\pi/4}^a \tan(x) dx + \int_b^{3\pi/4} \tan(x) dx = \lim_{a \rightarrow (\pi/2)^-} \int_{\pi/4}^a \tan(x) dx + \lim_{b \rightarrow (\pi/2)^+} \int_b^{3\pi/4} \tan(x) dx.$$

De plus, on a

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln(\cos(x)) + C,$$

d'où

$$\lim_{a \rightarrow (\pi/2)^-} \int_{\pi/4}^a \tan(x) dx = \lim_{a \rightarrow (\pi/2)^-} -\ln(\cos(a)) + \ln(\sqrt{2}/2) = +\infty.$$

L'intégrale diverge.

2) La durée de vie moyenne M d'un atome de carbone 14, une substance radioactive, que l'on emploie pour dater, est égale à

$$M = k \int_0^{\infty} t e^{-kt} dt$$

où $k = 0.000121$. Calculer la durée de vie moyenne M d'un atome de carbone 14.

Problème en $+\infty$, on calcule donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a t e^{-kt} dt$$

Par intégration par parties ($u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-kt}$), on a

$$\int te^{-kt} dt = -\frac{t}{k}e^{-kt} + \frac{1}{k} \int e^{-kt} dt = -\frac{t}{k}e^{-kt} - \frac{1}{k^2}e^{-kt} + C,$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a te^{-kt} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} -\frac{a}{k}e^{-ka} - \frac{1}{k^2}e^{-ka} + \frac{1}{k^2}$$

On a de plus

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} -\frac{a}{k}e^{-ka} = 0$$

(appliquer l'Hospital à $ae^{-ka} = \frac{a}{e^{ka}}$).

et

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2}e^{-ka} = 0.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{k^2} = 6.83 * 10^7$.

Séparation de variables

3) Trouver la solution de l'équation différentielle suivante, en tenant compte de la condition initiale donnée.

$$\frac{dx}{dt} = xe^{-kt}$$

avec

$$x(0) = 3.$$

L'équation est séparable, on a

$$\frac{dx}{dt}x(t)^{-1} = e^{-kt}.$$

On en déduit

$$\int \frac{dx}{x} = \int e^{-kt} dt,$$

Soit

$$\ln(x) = -\frac{1}{k}e^{-kt} + C,$$

comme $x(0) = 3$, on a $C = \frac{1}{k} + \ln(3)$ et $x(t) = 3e^{1/k - e^{-kt}/k}$.

4) Trouver la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos^2(x)}{t}$$

avec

$$x(1) = \pi/4.$$

L'équation est séparable, on a

$$\frac{dx}{dt} \cos^{-2}(x) = \frac{1}{t}$$

On en déduit

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int \frac{1}{t} dt,$$

soit

$$\tan(x) = \ln(t) + C,$$

comme $x(1) = \pi/4$, on a $C = 1$ et $x(t) = \arctan(\ln(t) + 1)$.