

DGD4, Mardi, le 3 février 2009

Intégrales impropres (suite) et applications

1) Résoudre

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \tan(x) dx$$

2) La durée de vie moyenne M d'un atome de carbone 14, une substance radioactive, que l'on emploie pour dater, est égale à

$$M = k \int_0^{\infty} t e^{-kt} dt$$

où $k = 0.000121$. Calculer la durée de vie moyenne M d'un atome de carbone 14.

Séparation de variables

3) Trouver la solution de l'équation différentielle suivante, en tenant compte de la condition initiale donnée.

$$\frac{dx}{dt} = x e^{-kt}$$

avec

$$x(0) = 3.$$

4) Trouver la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos^2(x)}{t}$$

avec

$$x(1) = \pi/4.$$

Portrait de phase, équilibres, stabilité, résolution et vérification

5) Le lac Akira contient une population de truite. Ce lac peut accueillir une population maximale de 1500 truites. Sa situation géographique exceptionnelle favorise la reproduction de l'espèce de sorte que le taux relatif de reproduction est de 3×10^{-3} année⁻¹. Suite à une catastrophe naturelle, on estime que la population est présentement de 300 truites.

- a) Écrire le modèle qui décrit la population de truite.
- b) Trouver le ou les points d'équilibre.
- c) Tracer le portrait de phase et déterminer graphiquement la stabilité des points d'équilibre.
- d) Avec le test de la dérivée, vérifier la stabilité trouvée en c).
- e) Quelle est l'équation de la population en fonction du temps? (Résoudre l'e.d. en mettant la capacité maximale à M , le taux relatif à k et la population initiale à x_0 . Remplacer les valeurs par la suite.)

6) La famille Chauvin, formée de pêcheurs expérimentés, s'installe au lac Akira. Ils y découvrent tout le potentiel de ce lac exceptionnel. La quantité de truites pêchés *par mois* est de $0.004x$, i.-e. une quantité qui est proportionnelle au nombre de truites dans le lac. Pour apprêter les truites afin de les vendre, ils utilisent un produit chimique pour la conservation. Ils rejettent les excédants dans le lac, ce qui diminue le taux relatif de reproduction à 1×10^{-3} année⁻¹.

- a) Écrire le modèle qui décrit la population de truite.
- b) Trouver le ou les points d'équilibre et leurs stabilités (avec le test de la dérivée). Interpréter ce qu'il advient de la population de truites.
- c) (Si le temps le permet) Trouver la solution de l'e.d. en utilisant le résultat général trouvé en e). Trouver quand la population va s'éteindre, i.-e. lorsque la solution sera inférieure à 1.