

DGD2, Mardi, le 19 janvier 2009

Intégrales par fractions partielles

2) Trouver

$$\int \frac{x^8 dx}{1+x^2}$$

La division nous donne

$$\frac{x^8}{1+x^2} = x^6 - x^4 + x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

On a donc

$$\int \frac{x^8 dx}{1+x^2} = \int (x^6 - x^4 + x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + \arctan(x) + C$$

Volumes de révolution avec intégrales définies

3) Un vase est un cône tronqué de hauteur 20cm de rayon à sa base de 15 cm et à son sommet de 12 cm.

Faire le dessin. C'est une droite passant aux points (0,15) et (20,12), elle est donc d'équation $y = ax + b$ vérifiant

$$\begin{cases} 15 = b \\ 12 = 20a + b \end{cases}$$

soit $y = -\frac{3}{20}x + 15$.

Le volume est alors

$$\int_0^{20} \pi \left(-\frac{3}{20}x + 15\right)^2 dx = \pi \int_0^{20} \left(\frac{9}{400}x^2 - \frac{9}{2}x + 225\right) dx = \pi \left[\frac{3}{400}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 225x\right]_0^{20} = 3660\pi$$

4) Quel est le volume obtenu par la rotation autour de l'axe des x de la fonction $f(x) = \sin(x)$ avec $0 \leq x \leq 2\pi$.

La formule du cours nous donne et on utilise les formules de trigonométries:

$$V = \int_0^{2\pi} \pi \sin(x)^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x)\right]_0^{2\pi} = \pi^2.$$

5) Des extra-terrestres passent près de la Terre pour se revitailler en eau de glacier. Pour cela, ils nous enlèvent les pôles Nord et Sud. Quel est le volume de la Terre (rayon $R = 6.3 \times 10^3$ km) avec ses pôles en moins (disons 500 km de moins des deux bouts).

La formule de l'arc de cercle est $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ pour avoir le volume de la terre complète on calculerait

$$\int_{-R}^R \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx.$$

Ici, il manque 500km aux deux bouts, donc

$$V = \int_{-R+500}^{R-500} \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \int_{-R+500}^{R-500} \pi(R^2 - x^2) dx = \pi \left[6300^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-5800}^{5800} = \frac{\pi}{3} 990988 \times 10^6 km^2$$

Moyenne

Revoir exercices premier DGD

6) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,1]$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$$

On veut calculer:

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

On a bien une forme où le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. De plus, $2^2 - 4 \times 5 = -16$, donc le dénominateur est irréductible (de degré 2 sans racine réelle).

On a $(x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$, on peut donc écrire

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{x^2 + 2x + 5} dx$$

Pour la première intégrale, on pose alors le changement de variable $y = x^2 + 2x + 5$ et donc $dy = (2x + 2)dx$.

$$\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = \int_5^8 \frac{1}{y} dy = [\ln(y)]_5^8 = \ln(8) - \ln(5).$$

Pour la seconde, on a

$$\frac{2}{x^2+2x+5} = \frac{2}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \frac{1}{((x+1)/2)^2+1}.$$

On pose le changement de variable $t = (x+1)/2$ et $dt = 1/2 dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2}{x^2+2x+5} dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{1}{((x+1)/2)^2+1} dx \\ &= \int_{1/2}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_{1/2}^1 = \arctan(1) - \arctan(1/2). \end{aligned}$$

On conclut donc que

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2}(\ln(8) - \ln(5)) - \frac{1}{2}(\arctan(1) - \arctan(1/2)).$$

7) Calculer la valeur moyenne de g sur $[0, 2\pi]$

$$g(x) = \sin(x)^2 \cos(x)^2$$

On utilise les formules trigonométriques:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} \sin(x)^2 \cos(x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (\sin(2x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos(4x)) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin(4x) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$