

**Exemple 2.6.5**

Trouver  $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

**Solution**

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$1 \equiv A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x$$

$$1 \equiv A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex$$

$$1 \equiv (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

d'où  $A+B=0$ ,  $C=0$ ,  $2A+B+D=0$ ,  $C+E=0$ ,  $A=1$ . Donc,  $A=1$ ,  $B=-1$ ,  $C=0$ ,  $D=-1$  et  $E=0$ . Ainsi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{x^2+1} - \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2(x^2+1)} + K \\ &= \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + \frac{1}{2(x^2+1)} + K \end{aligned}$$

**Remarque 1**

Pour intégrer certaines formes où on retrouve un facteur quadratique indécomposable affecté d'un exposant plus grand que 1, il peut arriver qu'on doive utiliser l'intégration par parties ou mieux, une substitution trigonométrique. Nous traiterons ces cas à la section 2.11.

**Remarque 2**

Certaines autres fonctions peuvent se ramener à des fonctions rationnelles par une substitution appropriée. C'est le cas des fonctions irrationnelles. Une fonction est dite *irrationnelle* si on peut l'exprimer à l'aide d'un nombre fini d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et d'extractions de racines sur des nombres réels et une variable  $x$ . Par exemple, c'est le cas des fonctions suivantes:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad g(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x^{3/4}} \quad h(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+5}{x^2+6x}}$$

La méthode utilisée pour intégrer de telles fonctions consiste à se ramener à des fonctions rationnelles par une substitution bien choisie. Toutefois, il ne faut pas penser que toutes les fonctions irrationnelles s'intègrent à l'aide des fonctions élémentaires. Pour les fins d'intégration, nous allons considérer deux situations: d'abord le cas où les exposants fractionnaires affectent uniquement la variable  $x$  et ensuite le cas où les exposants fractionnaires affectent une certaine fonction de  $x$ . Expliquons la technique à l'aide de deux exemples.

**Exemple 2.6.6**

Trouver  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

**Solution**

Posons  $u = x^{1/6}$ . Le choix de cette substitution est justifié par le fait que tous les exposants deviennent entiers. En effet, si  $u = x^{1/6}$ , alors  $u^2 = x^{1/3}$  et  $u^3 = x^{1/2}$ . De plus:

$$du = \frac{1}{6} x^{-5/6} dx \Rightarrow dx = 6x^{5/6} du = 6u^5 du$$

Donc:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{u^3 \times 6u^5 du}{1+u^2} \\ &= 6 \int \frac{u^8}{1+u^2} du \\ &= 6 \int \left( u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2} \right) du \\ &= 6 \left( \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} - u + \arctan u \right) + K \\ &= \frac{6}{7} x^{7/6} - \frac{6}{5} x^{5/6} + 2\sqrt{x} - 6x^{1/6} + 6 \arctan x^{1/6} + K \end{aligned}$$