

DGD2, Mardi, le 19 janvier 2009

Intégrales par fractions partielles

2) Trouver

$$\int \frac{x^8 dx}{1+x^2}$$

La division nous donne

$$\frac{x^8}{1+x^2} = x^6 - x^4 + x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

On a donc

$$\int \frac{x^8 dx}{1+x^2} = \int (x^6 - x^4 + x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + \arctan(x) + C$$

Volumes de révolution avec intégrales définies

3) Un vase est un cône tronqué de hauteur 20cm de rayon à sa base de 15 cm et à son sommet de 12 cm.

Faire le dessin. C'est une droite passant aux points (0,15) et (20,12), elle est donc d'équation $y = ax + b$ vérifiant

$$\begin{cases} 15 = b \\ 12 = 20a + b \end{cases}$$

soit $y = -\frac{3}{20}x + 15$.

Le volume est alors

$$\int_0^{20} \pi \left(-\frac{3}{20}x + 15\right)^2 dx = \pi \int_0^{20} \left(\frac{9}{400}x^2 - \frac{9}{2}x + 225\right) dx = \pi \left[\frac{3}{400}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 225x\right]_0^{20}$$

Calculer son volume en utilisant l'intégrale vue en cours. On pourra ensuite retrouver ce volume en utilisant la formule du cône $\pi r^2 h/3$. (r son rayon et h sa hauteur).

4) Quel est le volume obtenu par la rotation autour de l'axe des x de la fonction $f(x) = \sin(x)$ avec $0 \leq x \leq 2\pi$.

5) Des extra-terrestres passent près de la Terre pour se revitailler en eau de glacier. Pour cela, ils nous enlèvent les pôles Nord et Sud. Quel est le volume de la Terre (rayon de 6.3×10^3 km) avec ses pôles en moins (disons 500 km de moins des deux bouts).

Moyenne

Revoir exercices premier DGD

6) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,1]$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$$

7) Calculer la valeur moyenne de g sur $[0,2\pi]$

$$g(x) = \sin(x)^2 \cos(x)^2$$