

MAT1732 B & C Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie II

Devoir #5

Professeurs : Pierre Bel et Sven-Joachim Kimmerle

Échéance : 17-18 mars, au début du cours

Question 1

Déterminer les solutions des systèmes suivants :

a)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 9y + 7z = 1 \end{cases}$$

Solution : La matrice augmentée associée au système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

On soustrait la première ligne à la deuxième et deux fois la première ligne à la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

On soustrait 5 fois la deuxième ligne à la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice augmentée est donc 3 et la matrice non augmentée a un rang 2 (il suffit de supprimer la dernière colonne pour le voir), le système n'a donc pas de solution.

2

b)

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 6 \\ x + 3y + 2z = 18 \\ 2x + 2y + 7z = 12 \end{cases}$$

Solution : La matrice augmentée associée au système est

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 18 \\ 2 & 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

On permute la ligne 1 et 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 18 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

On soustrait le double de la première ligne à la deuxième et troisième ligne

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 18 \\ 0 & -4 & -3 & -30 \\ 0 & -4 & 3 & -24 \end{pmatrix}.$$

On ajoute la deuxième ligne multipliée par $3/4$ à la première ligne et soustrait la deuxième ligne à la troisième.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -4 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

On divise la deuxième ligne par -4 et la troisième par 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On ajoute la troisième ligne multipliée par $1/4$ à la première et la troisième ligne multipliée par $-3/4$ à la deuxième

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système possède une unique solution $x = -17/4$, $y = 27/4$ et $z = 1$.

Question 2

Soit le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases}.$$

a) Écrire M la matrice augmentée associée au système.

Solution :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calculer la matrice échelonnée réduite de M .

Solution :

On permute la première ligne et la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On soustrait le triple de la première ligne à la deuxième et le double à la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & -2 & -10 & -24 & -7 \\ 0 & -1 & -7 & -17 & -5 \end{pmatrix}.$$

On permute la deuxième ligne et la troisième, et on multiplie la deuxième ligne par -1 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 17 & 5 \\ 0 & -2 & -10 & -24 & -7 \end{pmatrix}.$$

On soustrait la deuxième ligne à la première et ajoute le double à la troisième.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 17 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

On ajoute la troisième ligne multipliée par $3/4$ à la première et multipliée par $-7/4$ à la deuxième.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

4

Soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

c) Donner les solutions du système.

Solution : Les variables x_1, x_2, x_3 sont bloquées et x_4 est libre.

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_4, \quad x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_4, \quad x_3 = \frac{3}{4} - \frac{5}{2}x_4$$

Question 3

Résoudre en x dans \mathbb{C} les équations :

a) $x^2 - 10x + 4 = 0$

Solution :

$$x = 5 + \sqrt{21} \quad \text{ou} \quad 5 - \sqrt{21}$$

b) $x^2 - 2 \cos(a)x + 1 = 0$, a un réel fixé.

Solution :

$$(-2 \cos(a))^2 - 4 = 4(\cos^2(a) - 1) = -4 \sin^2(a) = (2i \sin(a))^2$$

donc

$$x = \frac{2 \cos(a) + 2i \sin(a)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2 \cos(a) - 2i \sin(a)}{2}$$

soit

$$x = \cos(a) + i \sin(a) \quad \text{ou} \quad \cos(a) - i \sin(a) = \cos(-a) + i \sin(-a)$$

on peut l'écrire aussi

$$x = e^{ia} \quad \text{ou} \quad e^{-ia}$$

Question 4

Soit $z_1 = e^{i\pi/3}$ et $z_2 = e^{i\pi/4}$

a) Exprimer z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

Solution :

$$z_1 = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

b) Calculer la forme cartésienne de z_1/z_2 .

Solution :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

c) Calculer la forme cartésienne de $z_1 z_2$.

Solution :

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$$

Question 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer A^2 .

Solution :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer A^3 .

Solution :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Déterminer la forme de A^n pour $n \geq 1$.

Solution :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$