

## MAT1732 B & C Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie II

### Devoir #4

Professeurs : Pierre Bel et Sven-Joachim Kimmerle

Échéance : 3-4 Mars, au début du cours

#### Question 1

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = e^{2t} P^2$$

avec la condition initiale  $P(0) = 1$ .

#### Solution:

Dans un premier temps on cherche la solution générale, dans un second temps on détermine la constante en utilisant la condition initiale. Pour la solution générale on sépare les variables  $P$  et  $t$ , c'est-à-dire on multiplie ou on divise afin de mettre toutes les expressions avec  $P$  au côté gauche et toutes les expressions avec  $t$  au côté droite. Ainsi,

$$P^{-2} dP = e^{2t} dt, \quad \text{et par intégration,} \quad \int P^{-2} dP = \int e^{2t} dt.$$

L'évaluation des intégrales donne

$$-\frac{1}{P} = \frac{1}{2}e^{2t} + C, \quad C \text{ une constante quelconque.}$$

On remarque qu'on n'a pas inclus une constante au côté gauche, puisque on pourrait l'ajouter à la constante  $C$ . On résout par rapport à  $P$

$$P = \frac{-2}{e^{2t} + 2C}.$$

Finalement on exploite la condition initiale pour déterminer  $C$ . Si  $t = 0$ , on sait que  $P = 1$ ; l'équation pour  $P$  donne

$$1 = P(0) = \frac{-2}{e^{2 \cdot 0} + 2C} = \frac{-2}{1 + 2C}.$$

Alors  $C = -3/2$ , et la solution particulière est

$$P(t) = \frac{-2}{e^{2t} - 3}.$$

#### Question 2

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = 1 - e^x,$$

a) Tracer le portrait de phase et le champ de pentes sur l'intervalle  $-2 \leq x \leq 2$ .

b) Calculer le(s) point(s) d'équilibre et déterminer leur stabilité par un calcul. Comparer avec l'étude graphique faite en a) .

**Solution:**

a) La variable est  $x$  et le taux de changement  $\frac{dx}{dt}$ , est égal à  $1 - e^x$  grâce à l'équation différentielle. On trace le champ de pentes (ou également on pourrait considérer le graphe  $y = 1 - e^x$  sur l'intervalle  $-2 \leq x \leq 2$ ), voir à la figure 1. Nous voyons que  $1 - e^x = 0$  pour  $x = 0$ , que  $1 - e^x > 0$  pour  $x < 0$  et que  $1 - e^x < 0$  pour  $x > 0$ . Cela détermine la directions des flèches au portrait de phase (voir à la figure 2). Le point  $x = 0$  est un point d'équilibre stable.

b) On considère le point d'équilibre  $x^* = 0$  et la fonction  $f(x) = 1 - e^x$ . Puisque  $f'(x) = -e^x$ , on obtient  $f'(x^*) = f'(0) = -1 < 0$ . Grâce au test de la dérivée, le point d'équilibre est stable. Cela correspond au resultat obtenu dans la partie a) .

**Question 3**

On suppose que la population  $N$  d'une espèce animale vérifie le modèle

$$\frac{dN}{dt} = \frac{5N^2}{1 + N^2} - 2N.$$

Pour quelle valeur critique, l'espèce est menacée d'extinction, c'est-à-dire qu'elle est la plus petite valeur initiale  $N(0)$  telle que la solution  $N(t)$  ne tend pas vers 0, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

**Solution:**

On trouve la réponse à la question en considérant le champ de pentes pour cette équation différentielle, c'est-à-dire on détermine où la fonction  $f(N) = \frac{5N^2}{1+N^2} - 2N$  est positive, zéro ou negative. On écrit

$$f(N) = \frac{5N^2}{1 + N^2} - 2N = \frac{5N^2 - 2N(1 + N^2)}{1 + N^2} = \frac{-2N^3 + 5N^2 - 2N}{1 + N^2}.$$

Le dénominateur est toujours positif. On factorise le numérateur afin de déterminer le signe de  $f$ . En générale, il est difficile de factoriser un polynôme cubique, mais on trouve que  $N$  est un facteur du polynôme. L'autre facteur est  $-2N^2 + 5N - 2$ , qu'on décompose en  $-(2N - 1)(N - 2) = -2(N - 1/2)(N - 2)$ . Donc

$$f(N) = \frac{-2N^3 + 5N^2 - 2N}{1 + N^2} = \frac{-2N(N - 1/2)(N - 2)}{1 + N^2}.$$

On conclut que  $f(N)$  change le signe aux points  $N = 0, 1/2$  et  $2$ , les valeurs où  $f(N) = 0$ . Si  $N > 2$ , on obtient  $f(N) < 0$ , si  $1/2 < N < 2$ , donc  $f(N) > 0$ , si  $0 < N < 1/2$ , donc  $f(N) < 0$ , et si  $N < 0$ , on trouve  $f(N) > 0$ . Cela implique que 0 est un point d'équilibre stable et que  $1/2$  est un point d'équilibre unstable. Alors si la valeur initiale pour  $N$  se trouvent sous  $1/2$ , donc  $N$  diminue jusqu'au prochain point d'équilibre, c'est-à-dire 0. Dans ce cas la population va s'éteindre asymptotiquement.

Si  $N$  commence dessus  $1/2$ , on trouve que la population  $N$  croît jusqu'au prochain point d'équilibre 2, qui est stable. Dans ce cas la population s'approche de la population stable 2.

Donc la valeur critique est le point d'équilibre instable  $1/2$ .

#### Question 4

Question 8.15 page 97 du polycopié de Benoît Dionne

#### Solution:

a) D'après la Loi de Newton pour la chaleur on trouve l'équation différentielle

$$T'(t) = K(22 - T(t))$$

avec la condition initiale

$$T(0) = 60.$$

$K$  est une constante positive, qui dépend de la conductivité thermique de l'objet et de sa surface exposée. On mesure la température  $T$  en unité de degré centigrade, le temps  $t$  en min, par exemple et  $K$  en  $\text{min}^{-1}$ . Pour plus des détails du modèle on se réfère à l'exemple 8.2.5 du polycopié de Benoît Dionne.

b) On résout l'équation différentielle en utilisant la méthode de la séparation des variables comme on le trouve en exemple 8.4.1 du polycopié. Finalement on obtient

$$T(t) = 22 + (60 - 22)e^{-Kt} = 22 + 38e^{-Kt}.$$

c) D'abord on utilise  $T(20) = 40$  et la solution de l'équation différentielle qu'on a trouvé en b) pour déterminer la constante inconnue  $K$ . On obtient

$$40 = 22 + 38e^{-20K},$$

donc

$$K = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{19}{9}\right) \approx 0.0374.$$

Alors

$$T(t) = 22 + 38e^{1/20 \ln(9/19)t}$$

et on trouve

$$T(60) = 22 + 38e^{3 \ln(9/19)} \approx 26.0388.$$

La température du café après une heure est environ  $26^\circ\text{C}$ .

#### Question 5

Question 8.16 page 97 du polycopié de Benoît Dionne

#### Solution:

La figure donnée au polycopie indique qu'il y a trois points d'équilibre  $1$ ,  $\frac{3}{2}$  et  $\frac{5}{2}$ . On trouve le portrait de phase, qui appartient à l'équation différentielle, à la figure 3. Le signe de  $y$  donne la direction des flèches. On conclut du portrait de phase, que  $1$  est stable, que  $\frac{3}{2}$  est instable et que  $\frac{5}{2}$  est stable.

#### Question 6

Question 8.24 page 98 du polycopié de Benoît Dionne

#### Solution:

Soit  $N(t)$  le nombre de gnous au temps  $t$ . On mesure  $t$  en ans. On peut interpréter la

question de la façon telle que  $M = 1800$  est le nombre **maximal** d'individus que la réserve faunique peut supporter. Le modèle logistique de croissance donne l'équation différentielle

$$N'(t) = kN(t)(1800 - N(t))$$

avec la condition initiale

$$N(0) = 1000.$$

Comme à la section 8.4.2 du polycopié on déduit que la solution de l'équation différentielle est donnée par

$$N(t) = \frac{1800}{Ee^{-1800kt} + 1},$$

où  $E = \pm e^{-1800C}$  est une constante. De la condition initiale on obtient que  $E > 0$  et  $C = 1/1800 \ln \frac{5}{4}$ , ainsi

$$N(t) = \frac{1800}{e^{-1800(k+C)t} + 1} = \frac{9000}{4e^{-1800kt} + 5}.$$

De plus il est donné que  $N(1) = 1100$ , alors

$$1100 = \frac{9000}{4e^{-1800k} + 5}.$$

On en déduit la valeur  $k = \frac{1}{1800} \ln\left(\frac{44}{35}\right) \approx 1.2713 \cdot 10^{-4}$ . Donc la solution est

$$N(t) = \frac{9000}{4e^{\ln(35/44)t} + 5}.$$

De

$$1500 = \frac{9000}{4e^{\ln(35/44)t} + 5}$$

ou

$$t = \frac{\ln(4)}{\ln(44/35)} \approx 6.0579$$

on déduit que la population atteint 1500 gnous après environ six ans et un mois.

**NB : Le fait de remettre votre devoir signé est interprété comme une déclaration de votre part que ce devoir est votre devoir et que vous n'avez pas copié sur un collègue de classe où sur une autre source.**

**Donnez s.v.p. votre nom et votre numéro d'étudiant(e) dans toutes les pages de devoir. Aggraper les pages.**