

MAT1732 B & C Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie II

Devoir #3

Professeurs : Pierre Bel et Sven-Joachim Kimmerle

Échéance : 3 février & 4 février, au début du cours

Question 1

Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. Si la limite existe, calculer la valeur de l'intégrale impropre sans approximation décimale.

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \text{b) } \int_0^{3\pi/4} \frac{\sin(x)}{\tan(x)} dx \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} dx \quad \text{d) } \int_0^{\infty} \frac{2 \arctan(x)}{1+x^2} dx$$

Solution:

a) Par la définition de l'intégrale impropre on a

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_p^q x^{-1/3} dx = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_p^q = \boxed{+\infty}.$$

Alors cette intégrale diverge vers plus l'infini.

b) On utilise la définition de la tangente

$$\int_0^{3\pi/4} \frac{\sin(x)}{\tan(x)} dx = \int_0^{3\pi/4} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{3\pi/4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

c) Par la règle de l'intégration par parties avec $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ on trouve

$$\int_q^1 \ln(x) \frac{1}{x} dx = (\ln(x) \ln(x)) \Big|_q^1 - \int_q^1 \frac{1}{x} \ln(x) dx.$$

Alors

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 \ln(x) \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \lim_{q \rightarrow 0^+} (\ln(1)^2 - \ln(q)^2) = \boxed{-\infty}.$$

d) L'intégration par parties donne

$$2 \int_0^q \arctan x \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan(x)^2 \Big|_0^q - 2 \int_0^q \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$$

Alors

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \arctan(x)^2 \Big|_0^q = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

Question 2

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a) } \int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3} dx \quad \text{b) } \int \frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} dx$$

Solution:

a) Pour résoudre $I = \int \frac{x^3+1}{x^2+3} dx$ il faut diviser le polynôme $x^3 + 1$ par le polynôme $x^2 + 3$, parce que le degré de numérateur est plus grand que celui de dénominateur. Si on divise, on obtient x avec le résidu $-3x + 1$,

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3} = x + \frac{-3x + 1}{x^2 + 3} = x - \frac{3x}{x^2 + 3} + \frac{1}{x^2 + 3}$$

c'est-à-dire on a trois intégrales à calculer,

$$I = \int x dx - \int \frac{3x}{x^2 + 3} dx + \int \frac{1}{x^2 + 3} dx.$$

L'intégrale première est facile. Pour la deuxième on utilise la substitution $u = x^2 + 3$. On récrit la troisième intégrale pour qu'on reçoit une dérivée de la fonction arctangente. Donc

$$I = \int x dx - \int \frac{3x}{x^2 + 3} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx.$$

Maintenant on fait la substitution $w = \frac{x}{\sqrt{3}}$ dans l'intégrale dernière. Alors

$$\begin{aligned} I &= \int x dx - \int \frac{3x}{u} \frac{du}{2x} + \frac{1}{3} \int \frac{1}{w^2 + 1} \sqrt{3} dw \\ &= \int x dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} du + \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{w^2 + 1} dw \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \ln |u| + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan w + C \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} x + C}. \end{aligned}$$

Remarque : Car la constante n'est pas uniquement déterminée, il y a des autres solutions. On peut vérifier que les autres sont aussi correctes par des manipulations de logarithme. Par exemple,

$$\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x^2}{3} + 1 \right| + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} + \tilde{C}$$

est une solution équivalente.

b) On commence par faire la division des polynômes. Donc

$$\frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} = x^2 + 4x + 13 + \frac{40x - 36}{x^2 - 4x + 3}.$$

La première partie de l'intégrale est simple à intégrer, pour la deuxième partie on a besoin de fractions partielles. On factorise le dénominateur

$$4 \frac{10x - 9}{x^2 - 4x + 3} = 4 \frac{10x - 9}{(x - 3)(x - 1)}.$$

On veut le récrire de la façon suivante

$$4 \frac{10x - 9}{(x - 3)(x - 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 1}.$$

Si on multiplie les deux côtés de l'égalité par $(x - 3)(x - 1)$, on trouve

$$4(10x - 9) = A(x - 1) + B(x - 3).$$

La substitution $x = 1$ donne

$$4 = A \cdot 0 + B \cdot (-2) \Rightarrow B = -2.$$

Ainsi, par la substitution $x = 3$,

$$84 = A \cdot 2 + B \cdot 0 \Rightarrow A = 42.$$

Donc

$$4 \frac{10x - 9}{(x - 3)(x - 1)} = \frac{42}{x - 3} - \frac{2}{x - 1}.$$

On intègre

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left(x^2 + 4x + 13 + \frac{42}{x - 3} - \frac{2}{x - 1} \right) dx \\ &= \boxed{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 13x + 42 \ln |x - 3| - 2 \ln |x - 1|}. \end{aligned}$$

Question 3

Montrer que

$$x(t) = -\frac{1}{2}(1 - 3 \exp(2t))$$

est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 2x$$

qui satisfait la condition initiale $x(0) = 1$. De plus déterminer l'ordre de cette équation différentielle.

Solution:

On vérifie que $x(t)$ est bien une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}(-3 \exp(2t) \cdot 2) = 3 \exp(2t), \quad 1 + 2x(t) = 1 - (1 - 3 \exp(2t)) = 3 \exp(2t)$$

et que la condition initiale est satisfaite. L'équation différentielle est d'ordre un.

Question 4

L'évolution de la population P d'une espèce animale est décrite par

$$\frac{dP}{dt} = 200 \ln(1 + \alpha) \times (1 + \alpha)^t,$$

où $P(t)$ est le nombre d'individus en fonction de temps et le temps t est mesuré en années. La population actuelle ($t = 0$) est 500. On suppose que le paramètre α est égal à 2%.

Résoudre l'équation différentielle et déterminer la population au bout de 5 ans. Arrondir votre réponse à l'entier le plus proche.

Solution:

On trouve la solution d'éq. diff. par le théorème fondamental du calcul.

$$\begin{aligned} P(t) &= P(0) + 200 \int_0^t \ln(1.02) 1.02^s \, ds \\ &= P(0) + 200 \int_0^t \ln(1.02) \exp(\ln(1.02)s) \, ds \\ &= 500 + 200(\exp(\ln(1.02)t) - 1) = 300 + 200 \times 1.02^t \end{aligned}$$

Alors pour $t = 5$

$$P(5) = 300 + 200 \times 1.02^5 \approx \boxed{521}.$$

NB : Le fait de remettre votre devoir signé est interprété comme une déclaration de votre part que ce devoir est votre devoir et que vous n'avez pas copié sur un collègue de classe où sur une autre source.

Donnez s.v.p. votre nom et votre numéro d'étudiant(e) dans toutes les pages de devoir. Aggrayer les pages.