

## MAT1732 B & C Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie II

### Devoir #2

Professeurs : Pierre Bel et Sven-Joachim Kimmerle  
chéance : 27 janvier & 28 janvier, au début du cours

#### Question 1

Calculez l'aire qui est bornée par les courbes  $f(x) = \sin(2x)$  et  $g(x) = \cos(2x)$  pour tout  $x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .

(Indication : Dessiner les courbes.)

#### Solution:

On commence avec un dessin comme à la figure 1.

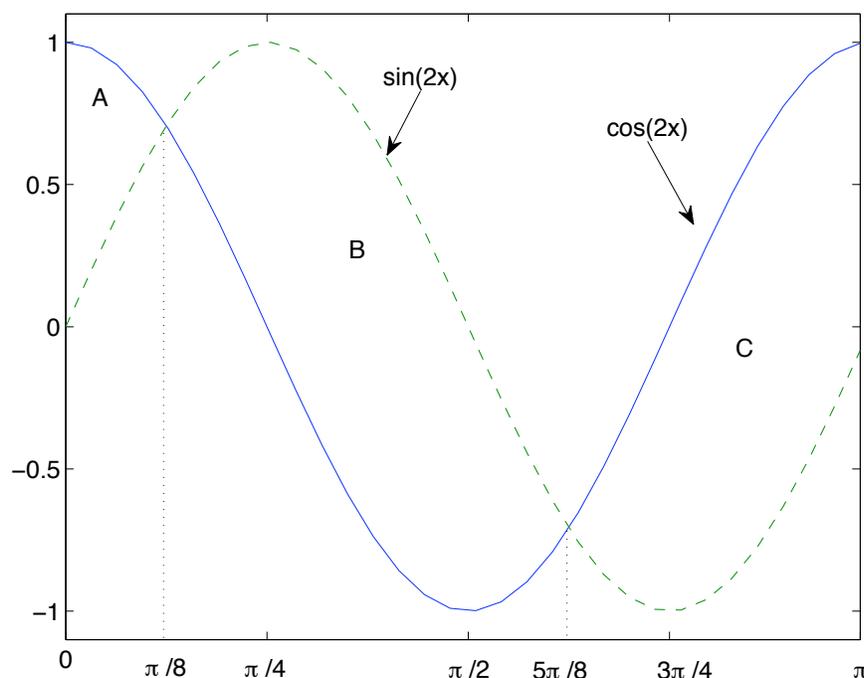


FIG. 1 – L'aire entre  $\sin(2x)$  et  $\cos(2x)$ .

Pour évaluer cette intégrale, on utilise la substitution  $u = 2x$ , donc  $du = 2 dx$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi |\sin(2x) - \cos(2x)| dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin(u) - \cos(u)| du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos(u) - \sin(u)) du + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(u) - \cos(u)) du + \frac{1}{2} \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos(u) - \sin(u)) du \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos(u) - \sin(u)) du + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(u) - \cos(u)) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}((\sin(u) + \cos(u))\Big|_{-3\pi/4}^{\pi/4} + (-\cos(u) - \sin(u))\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}) = \frac{1}{2}((\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + \sqrt{2})) \\
&= \boxed{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

On a utilisé la périodicité de fonctions sin et cos.

### Question 2

Supposons qu'une énergie est produite avec le taux

$$Q(t) = |360t - 39t^2 + t^3|.$$

$Q$  est mesuré en joules par heures et le temps  $t$  est mesuré en heures. Trouvez l'énergie totale qui est générée entre les temps  $t = 0$  et  $t = 24$ .

(Indication : Le taux  $Q$  est nul en temps  $t = 0, 15$  et  $24$ .)

### Solution:

Encore une fois, on trace un dessin. On a un polynôme cubique, qui coupe l'axe de  $x$  en  $t = 0, 15$  et  $24$ . Pour la valeur absolue, nous tournons la partie négative en haut comme à la figure 2.

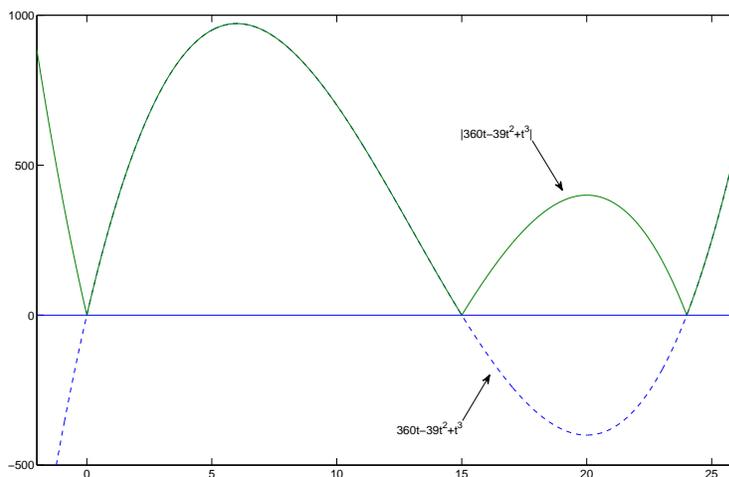


FIG. 2 – Graphe de  $|g(x)|$  (ligne continue) et  $g(x)$  (ligne pointillé).

Parce-que on a une valeur absolue, in faut séparer l'intégrale en deux parties, de  $x = 0$  à  $15$  et de  $x = 15$  à  $24$ . Alors, l'énergie totale

$$\begin{aligned}
\int_0^{24} Q(t) dt &= \int_0^{24} |360t - 39t^2 + t^3| dt = \int_0^{15} (360t - 39t^2 + t^3) dt + \int_{15}^{24} (-360t + 39t^2 - t^3) dt \\
&= \left[ 180t^2 - 13t^3 + \frac{t^4}{4} \right]_0^{15} + \left[ 13t^3 - 180t^2 - \frac{t^4}{4} \right]_{15}^{24} = \frac{23301}{2} = \boxed{11650.5 \text{ joules/heure}}.
\end{aligned}$$

**Question 3**

On considère un serpent qui fait deux mètres de longueur. La densité du serpent est donnée par

$$\rho(x) = 1.0 + 2.0 \times 10^{-8}x^2(240 - x).$$

$\rho$  est mesurée en gramme par centimètre et  $x$  est mesuré en centimètre de bout de la queue du serpent.

1. Trouvez la densité minimale du serpent.
2. Trouvez la densité maximale du serpent.
3. Où se trouve le maximum de densité?
4. Trouvez la masse totale du serpent.
5. Trouvez la densité moyenne du serpent.
6. Comparez la densité moyenne avec le maximum et le minimum?
7. Faites une esquisse de la densité et de sa moyenne.

**Solution:**

1. La dérivée est

$$\frac{d}{dx}\rho(x) = x(9.6 \times 10^{-6} - 6 \times 10^{-8}x).$$

La condition nécessaire pour un extremum est  $\frac{d}{dx}\rho(x) = 0$ . Alors  $x = 0$  ou  $x = 160$  pour un extremum.

La deuxième dérivée est

$$\frac{d^2}{dx^2}\rho(x) = 9.6 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{-8}x.$$

Donc  $x = 0$  est un minimum et  $x = 160$  est un maximum. Alors la densité minimale est  $\boxed{\rho(0) = 1 \text{ g/cm}}$ .

2. Donc  $\boxed{\rho(160) = 1.04096 \text{ g/cm}}$  est le maximum de la densité.
3. Le maximum de densité se trouve à la position  $\boxed{x = 160 \text{ cm}}$ .
4. La masse totale est donné par l'intégrale entre 0 et 200 (correspondant à 2m)

$$\begin{aligned} \int_0^{200} \rho(x) dx &= \int_0^{200} [1 + 2 \times 10^{-8}x^2(240 - x)] dx \\ &= \int_0^{200} [1 + 4.8 \times 10^{-6}x^2 - 2 \times 10^{-8}x^3] dx \\ &= [x + 1.6 \times 10^{-6}x^3 - 5 \times 10^{-9}x^4]_0^{200} = 200 + 12.8 - 8 = \boxed{204.8 \text{ g}}. \end{aligned}$$

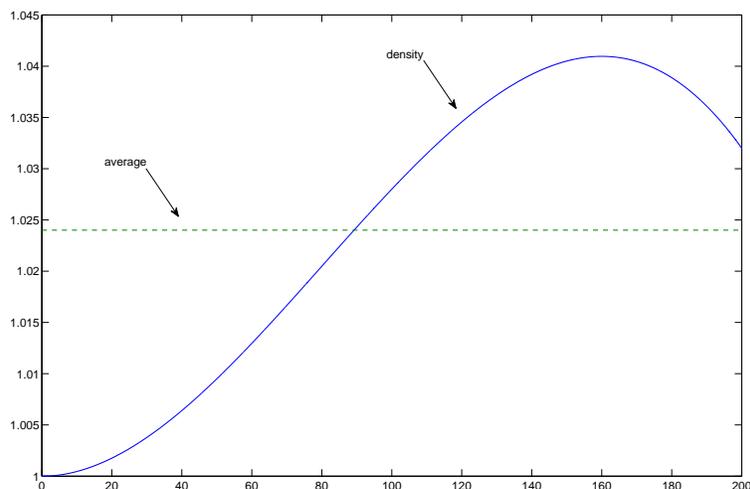


FIG. 3 – La densité (ligne continue) et sa moyenne (ligne pointillé).

5. Alors la densité moyenne (qui est égale à la valeur de la masse moyenne) est

$$\frac{1}{200} \int_0^{200} \rho(x) dx = \frac{204.8}{200} = \boxed{1.024 \text{ g/cm}}.$$

6. On vérifié le théorème de la moyenne pour l'intégral (confer à la figure 3).

7. Le dessin se trouve à la figure 3.

#### Question 4

Calculez le volume, qui est obtenue par une rotation de courbe  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4}\right)$  autour de l'axe de  $x$ , où  $x$  est entre  $-\pi$  and  $\pi$ .

#### Solution:

Le volume cherché est donné par la formule

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\left(\frac{x}{4}\right) dx.$$

Pour calculer cette intégrale on va utiliser la relation trigonométrique suivante

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta && \text{(parce que } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1) \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Finalement

$$V = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) dx = \frac{\pi}{2} \left[ x - 2 \sin \frac{x}{2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[ \left( \pi - 2 \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left( -\pi - 2 \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] = \frac{\pi}{2} (2\pi - 4) = \boxed{\pi(2 - \pi)}.$$

**NB : Le fait de remettre votre devoir signé est interprété comme une déclaration de votre part que ce devoir est votre devoir et que vous n'avez pas copié sur un collègue de classe o sur une autre source.**

**Donnez s.v.p. votre nom et votre numéro d'étudiant(e) dans toutes les pages de devoir. Aggraper les pages.**