

## MAT1732 B & C Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie II

### Devoir #1

Professeurs : Pierre Bel et Sven-Joachim Kimmerle

Échéance : 21 janvier, au début du cours

#### Question 1

Calculer

$$\int \frac{1}{1+4t} dt.$$

#### Solution:

Pour évaluer cette intégrale, on utilise la substitution  $u = 1 + 4t$ . Donc  $du = 4 dt$ . On a donc

$$\int \frac{1}{1+4t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du \Big|_{u=1+4t} = \boxed{\frac{1}{4} \ln(|1+4t|) + C},$$

ou la constante  $C$  est un nombre réel arbitraire.

#### Question 2

Évaluer les intégrales définies suivantes. Donner une réponse exacte (i.e. aucune approximation décimale.)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-2}^2 (y^3 + 4y^5) dy & \text{b)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [x^2 - 20 \sin(x)] dx & \text{c)} \int_2^5 \cos(2\pi(x-2)) dx \\ \text{d)} \int_0^{\pi/4} e^{\cos(x)} \sin(x) dx & \text{e)} \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx & \end{array}$$

#### Solution:

a)

$$\int_{-2}^2 (y^3 + 4y^5) dy = \left( \frac{y^4}{4} + \frac{4}{6} y^6 \right) \Big|_{y=-2}^2 = \left( \frac{2^4}{4} + \frac{2}{3} 2^6 \right) - \left( \frac{(-2)^4}{4} + \frac{2}{3} (-2)^6 \right) = \boxed{0}.$$

On remarque que l'on aurait pu simplifier le calcul de l'intégrale, car  $y^3$  et  $4y^5$  sont des fonctions impaires, et l'on intègre sur un intervalle qui est symétrique par rapport à l'origine.

b)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 - 20 \sin(x)) dx &= \left( \frac{x^3}{3} + 20 \cos(x) \right) \Big|_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \left( \frac{(\pi/2)^3}{3} + 20 \cos(\pi/2) \right) - \left( \frac{(-\pi/2)^3}{3} + 20 \cos(-\pi/2) \right) = \boxed{\frac{\pi^3}{12}}. \end{aligned}$$

On remarque que l'on aurait pu simplifier le calcul de l'intégrale. On a

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 - 20 \sin(x)) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx - 20 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} x^2 dx,$$

car  $x^2$  est une fonction paire et  $\sin(x)$  est une fonction impaire, et on intègre sur un intervalle qui est symétrique par rapport à l'origine.

c) Pour évaluer l'intégrale  $\int_2^5 \cos(2\pi(x-2)) dx$ , on utilise la substitution  $u = 2\pi(x-2)$ . Donc  $du = 2\pi dx$ .  $u = 0$  lorsque  $x = 2$  et  $u = 6\pi$  lorsque  $x = 5$ . On a donc

$$\int_2^5 \cos(2\pi(x-2)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{6\pi} \cos(u) du = \frac{1}{2\pi} (\sin(u)) \Big|_{u=0}^{6\pi} = \boxed{0}.$$

Ce résultat n'est pas une surprise. On remarque que l'intervalle  $[2, 5]$  représente trois périodes de la fonction sinusoidale  $\cos(2\pi(x-2))$ . Or, l'intégrale d'une fonction sinusoidale (de moyenne 0) sur une période donne toujours 0.

d) On utilise la règle de substitution. On pose  $y = \cos(x)$ , donc  $dy = -\sin(x) dx$ . De plus  $\cos(0) = 1$  et  $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ . On a

$$\int_0^{\pi/4} e^{\cos(x)} \sin(x) dx = - \int_1^{\sqrt{2}/2} e^y dy = - (e^y) \Big|_1^{\sqrt{2}/2} = (e^y) \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 = \boxed{e - e^{\sqrt{2}/2}}.$$

e) On utilise la méthode d'intégration par parties. L'intégrand est  $x \cos(2x) = f(x)g'(x)$  où  $f(x) = x$  et  $g'(x) = \cos(2x)$ . Ainsi,  $f'(x) = 1$ ,  $g(x) = (1/2) \sin(2x)$  et

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx &= \int_0^{\pi/2} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f'(x)g(x) dx \\ &= \left( \frac{x}{2} \sin(2x) \right) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx = \left( \frac{x}{2} \sin(2x) \right) \Big|_0^{\pi/2} + \left( \frac{1}{4} \cos(2x) \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \left( \frac{\pi}{4} \sin(\pi) - 0 \right) + \left( \frac{1}{4} \cos(\pi) - \frac{1}{4} \cos(0) \right) = \boxed{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

### Question 3

Le taux de croissance d'un espèce de poisson est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{dL}{dt} = 6.48e^{-0.09t}$$

où  $L(t)$  est la longueur d'un poisson en centimètres après  $t$  années. On suppose que la longueur initiale d'un poisson est de  $L(0) = 5$  cm. De combien de centimètres la longueur d'un poisson augmentera-t-elle entre  $t = 0.5$  et  $t = 1.5$  années? Donner votre réponse avec une précision de deux chiffres après le point des décimales.

#### Solution:

On cherche  $L(1.5) - L(0.5)$ . Or,

$$L(1.5) - L(0.5) = \int_{0.5}^{1.5} \frac{dL}{dt}(t) dt = \int_{0.5}^{1.5} 6.48e^{-0.09t} dt .$$

Si on utilise la substitution  $u = -0.09t$ , on a  $du = -0.09 dt$ ,  $u = -0.045$  lorsque que  $t = 0.5$  et  $u = -0.135$  lorsque  $t = 1.5$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} L(1.5) - L(0.5) &= \int_{0.5}^{1.5} 6.48e^{-0.09t} dt = -\frac{6.48}{0.09} \int_{-0.045}^{-0.135} e^u du = \frac{6.48}{0.09} \int_{-0.135}^{-0.045} e^u du \\ &= \frac{6.48}{0.09} (e^u) \Big|_{u=-0.135}^{-0.045} = 72 (e^{-0.045} - e^{-0.135}) = \boxed{5.92} . \end{aligned}$$

On note que la valeur initiale de  $L$  n'est pas utile pour déterminer la variation de  $L$  entre deux valeurs de  $t$ .

#### Question 4

La production d'un produit chimique est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = 5te^{-t}$$

où  $P(t)$  est la quantité du produit chimique (mesurée en moles) que l'on retrouve  $t$  minutes après le début de la réaction. Initialement, on a  $P(0) = 2$  moles du produit. Déterminer la quantité du produit chimique qui est produite entre 5 et 10 après le début de la réaction. Donner votre réponse avec quatre décimales.

#### Solution:

On cherche  $P(10) - P(5)$ . Or,

$$P(10) - P(5) = \int_5^{10} \frac{dP}{dt}(t) dt = \int_5^{10} 5te^{-t} dt .$$

On utilise l'intégration par parties. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(10) - P(5) &= \int_5^{10} 5te^{-t} dt = -5te^{-t} - \int_5^{10} 5(-e^{-t}) dt \\ &= (-5te^{-t} - 5e^{-t}) \Big|_5^{10} = (-50e^{-10} - 5e^{-10} - (-25e^{-5} - 5e^{-5})) \\ &= -55e^{-10} + 30e^{-5} \approx 0.199641414 = \boxed{1.996 \cdot 10^{-1}} . \end{aligned}$$

On note que la valeur initiale de  $P$  n'est pas utile pour déterminer la variation de  $P$  entre deux valeurs de  $t$ .

**NB : Le fait de remettre votre devoir signé est interprété comme une déclaration de votre part que ce devoir est votre devoir et que vous n'avez pas copié sur un collègue de classe où sur une autre source.**

**Donnez s.v.p. votre nom et votre numéro d'étudiant(e) dans toutes les pages de devoir. Aggraper les pages.**