

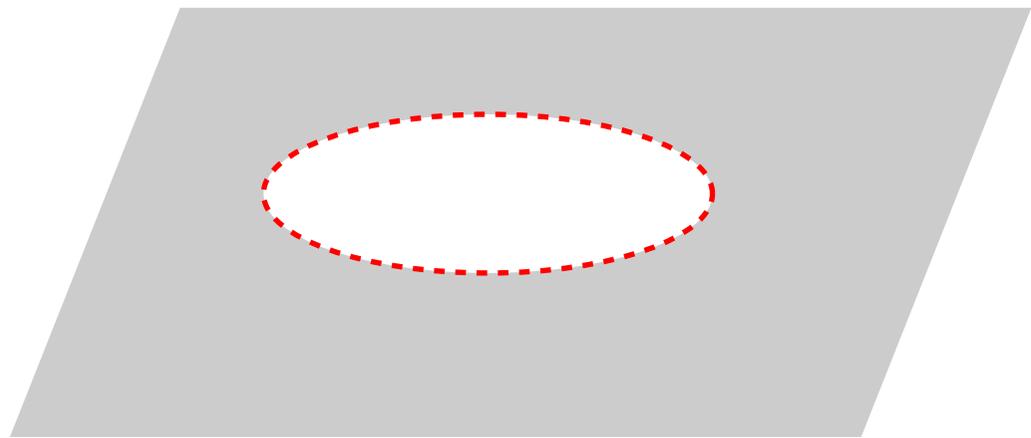
Gonflabilité

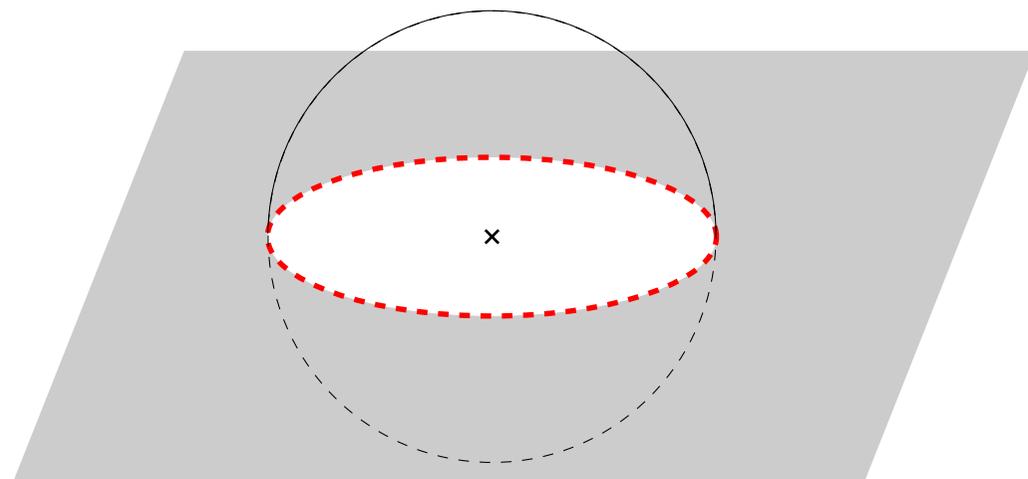
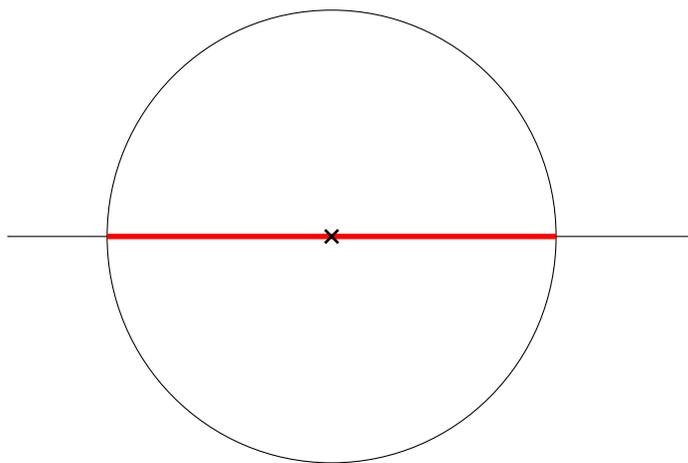
Guillaume Batog (ENS Cachan, Cachan)
Xavier Goaoc (INRIA Grand Est, Nancy)

Présentation du problème

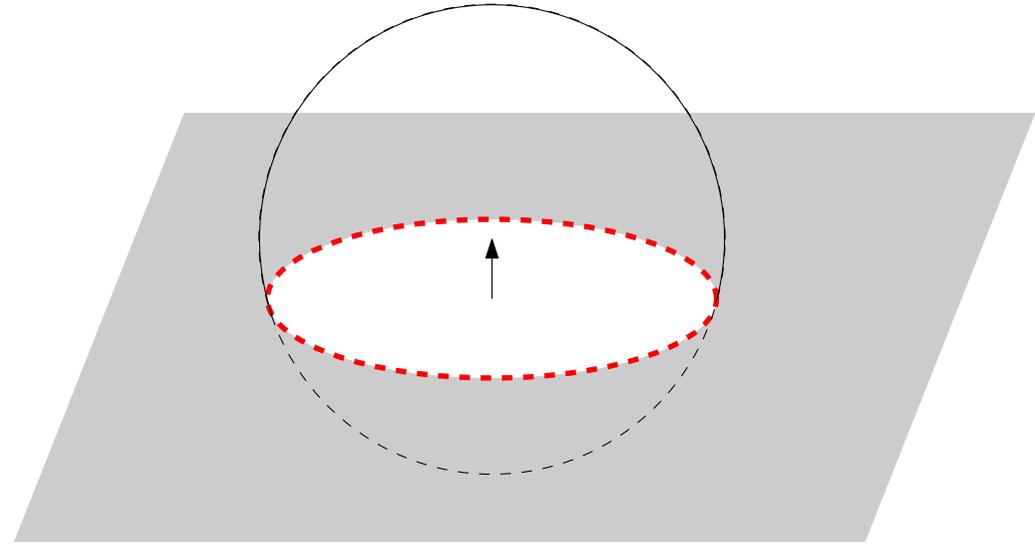
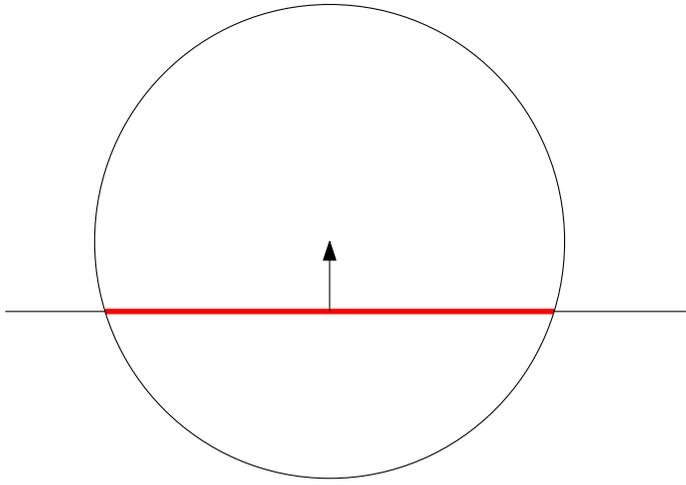
1-gonflabilité

δ -gonflabilité ($\delta \geq 2$)

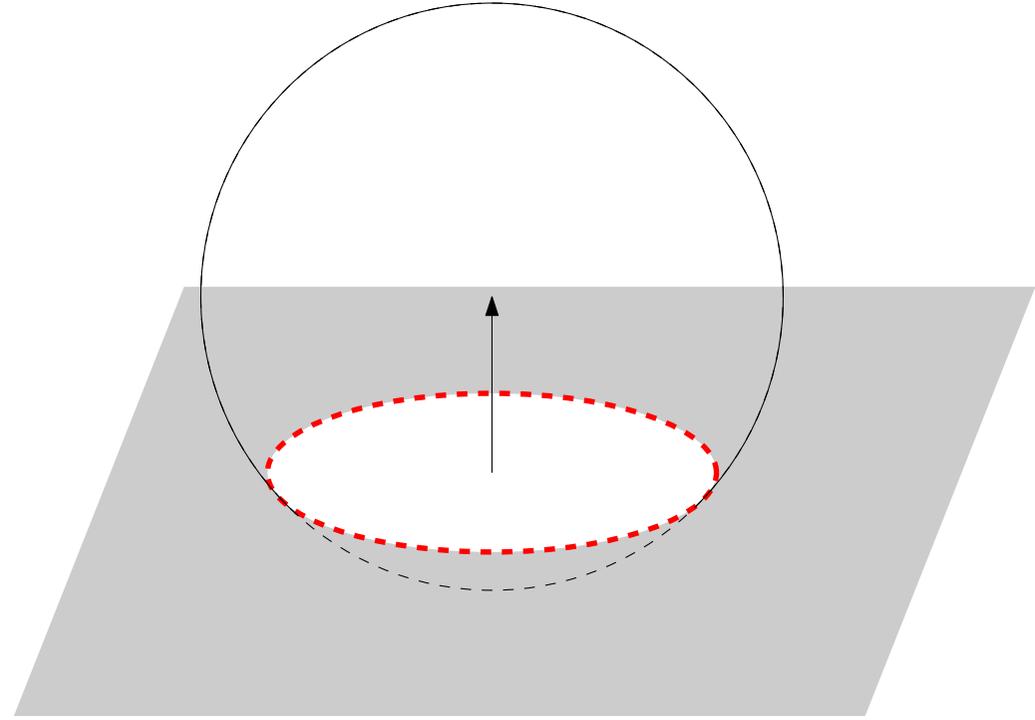
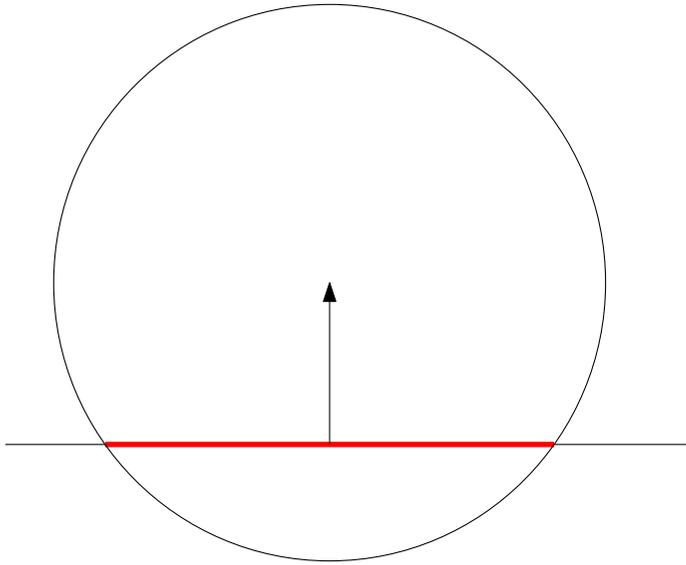




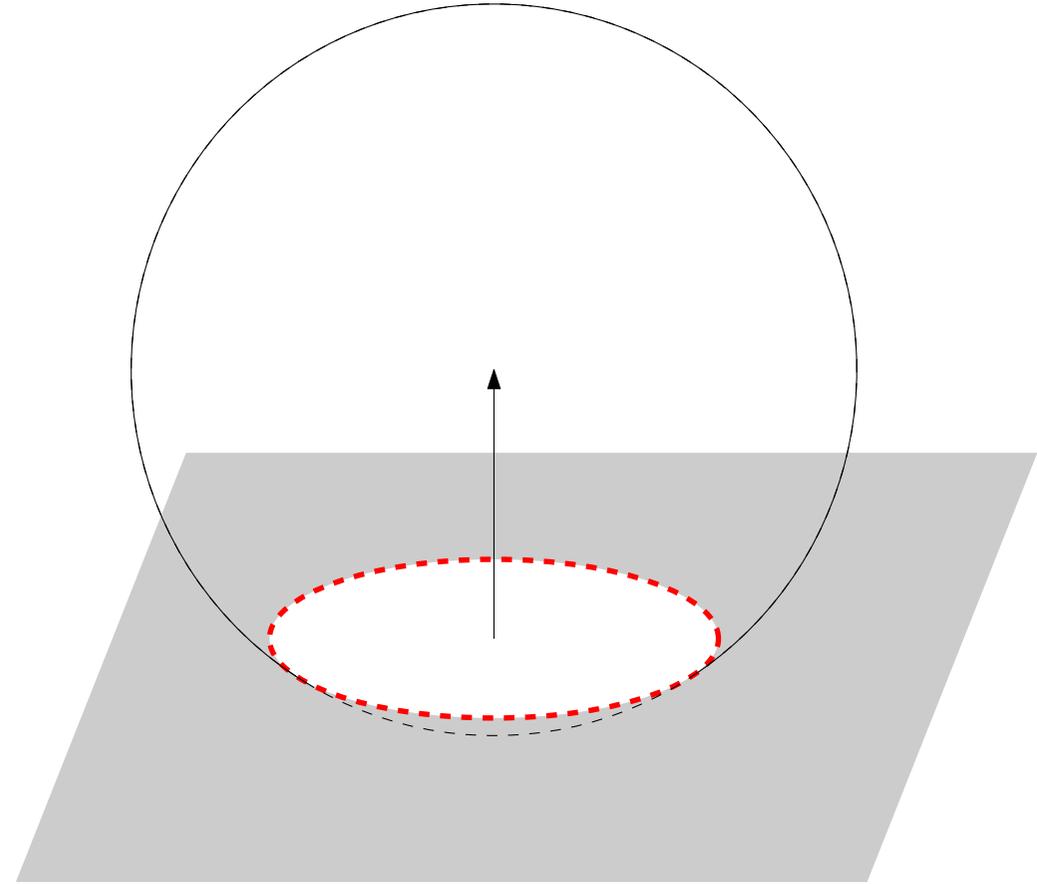
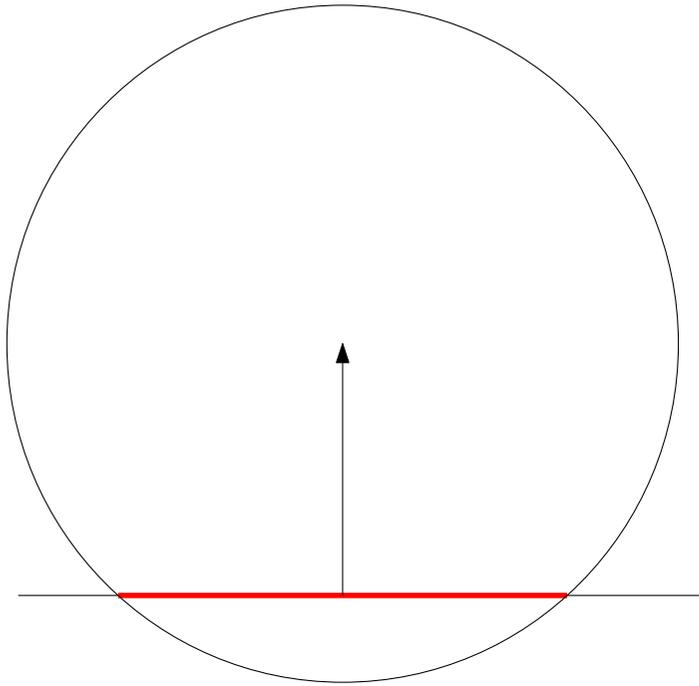
Passage en dimension supérieure



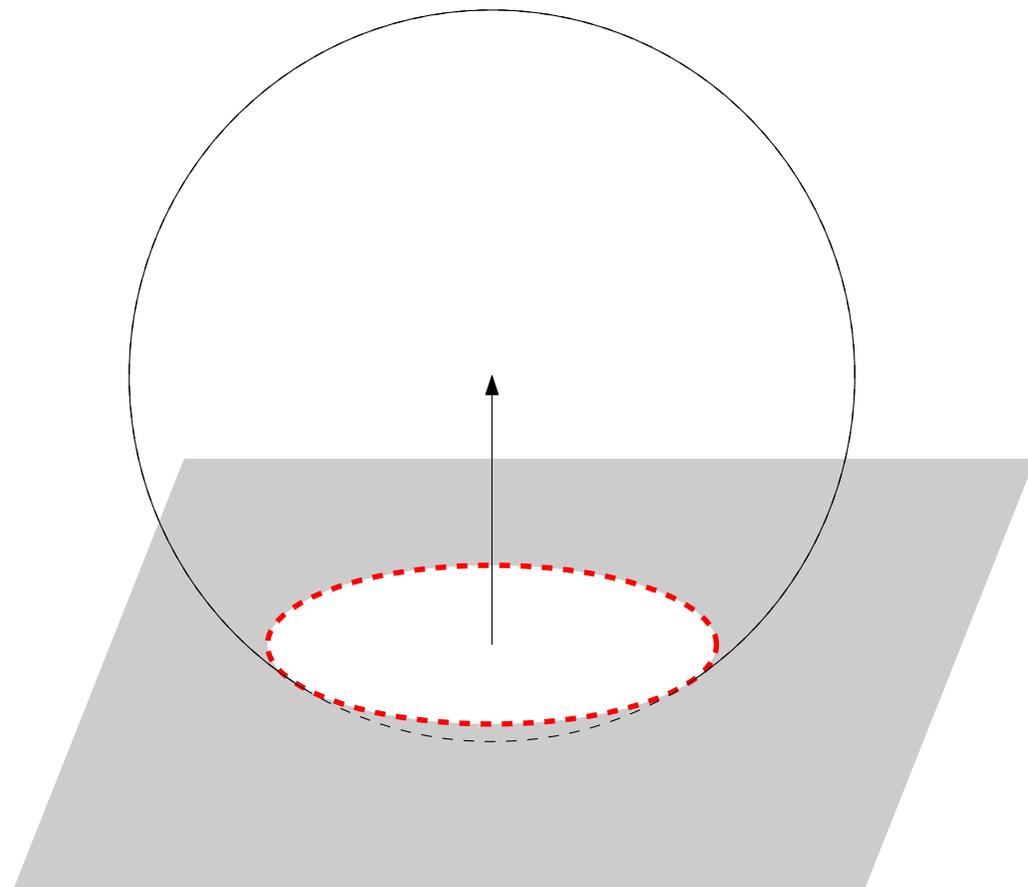
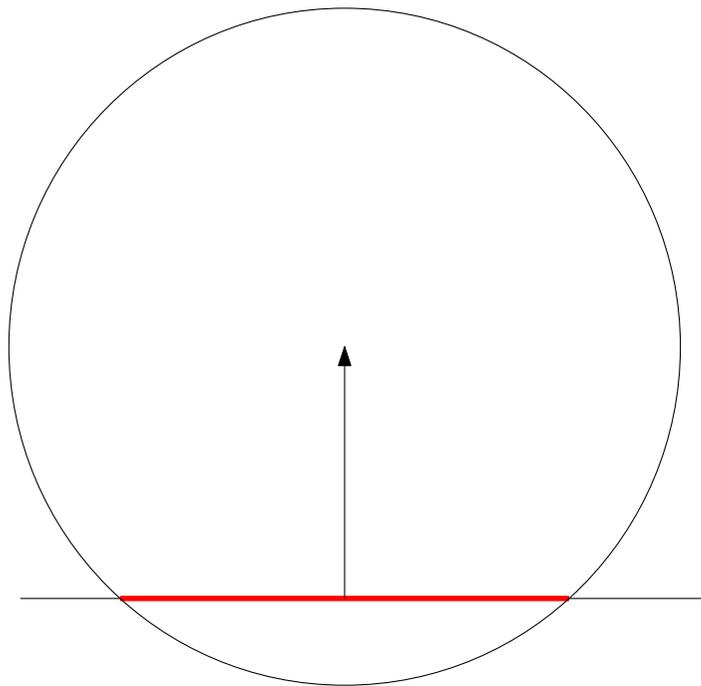
Gonflement



Gonflement

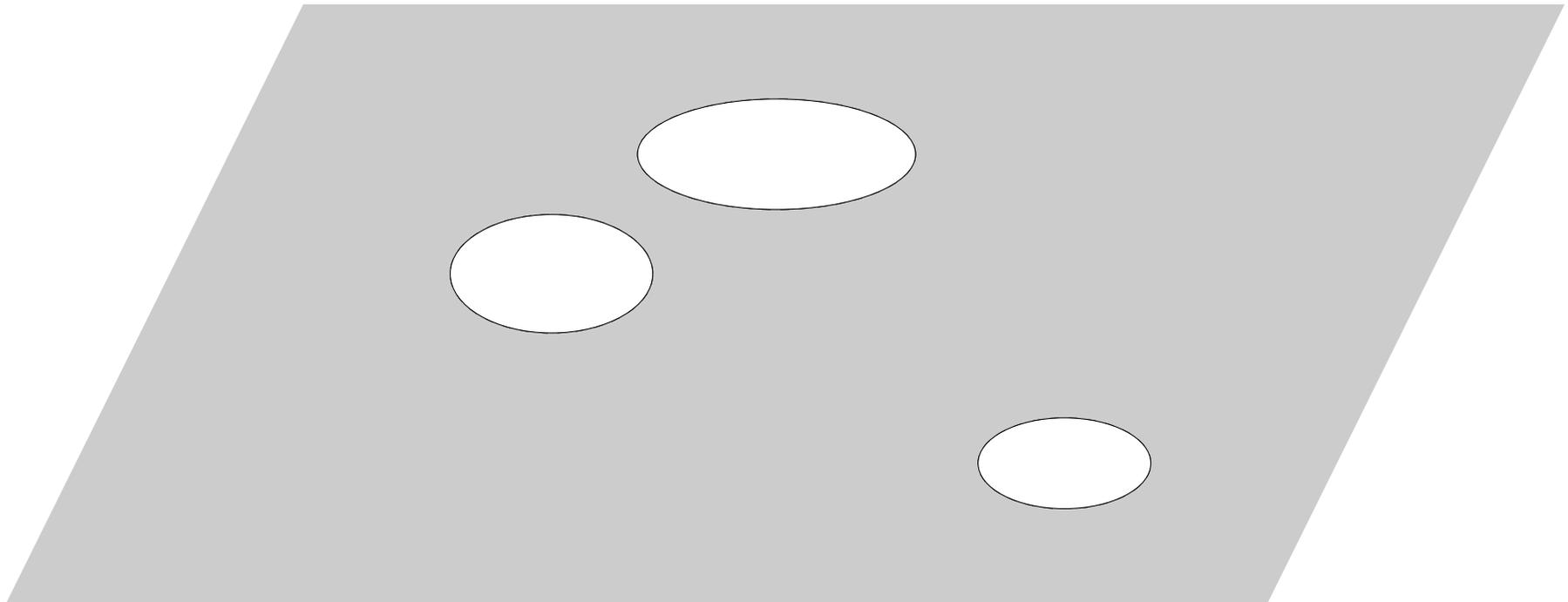


Gonflement

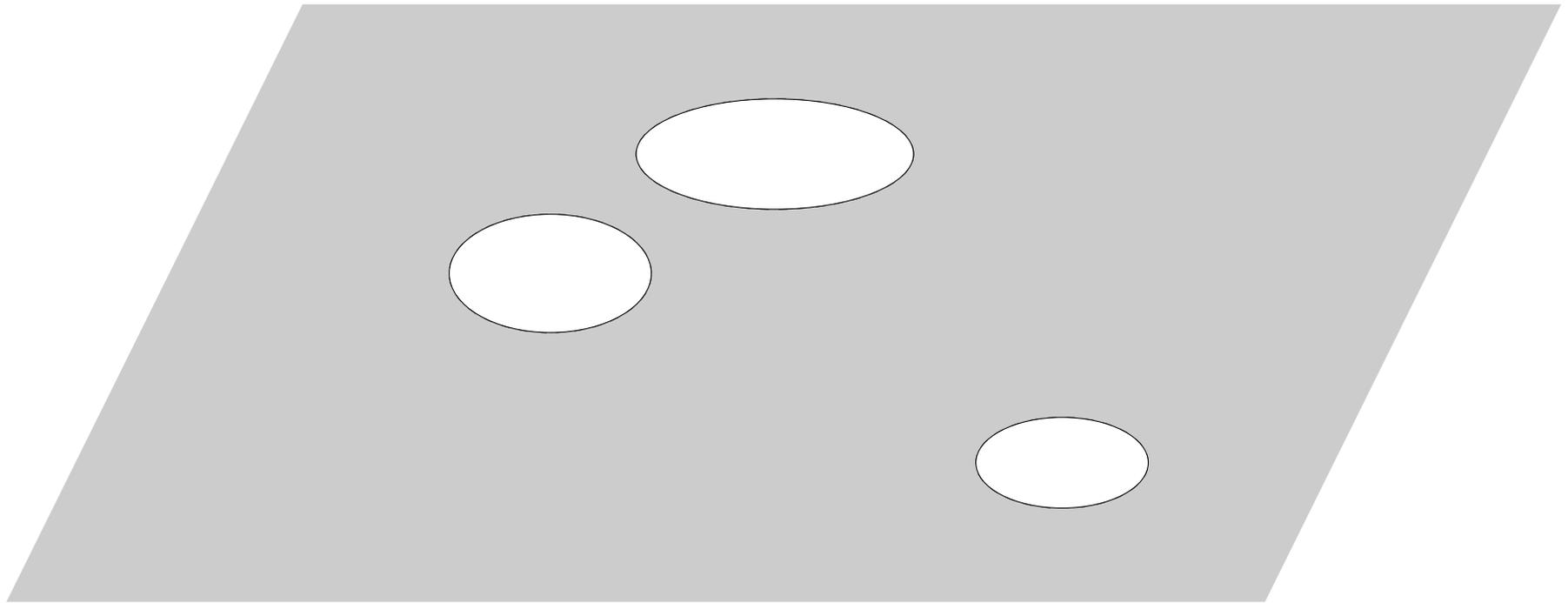


BUT: boules gonflées disjointes de même rayon

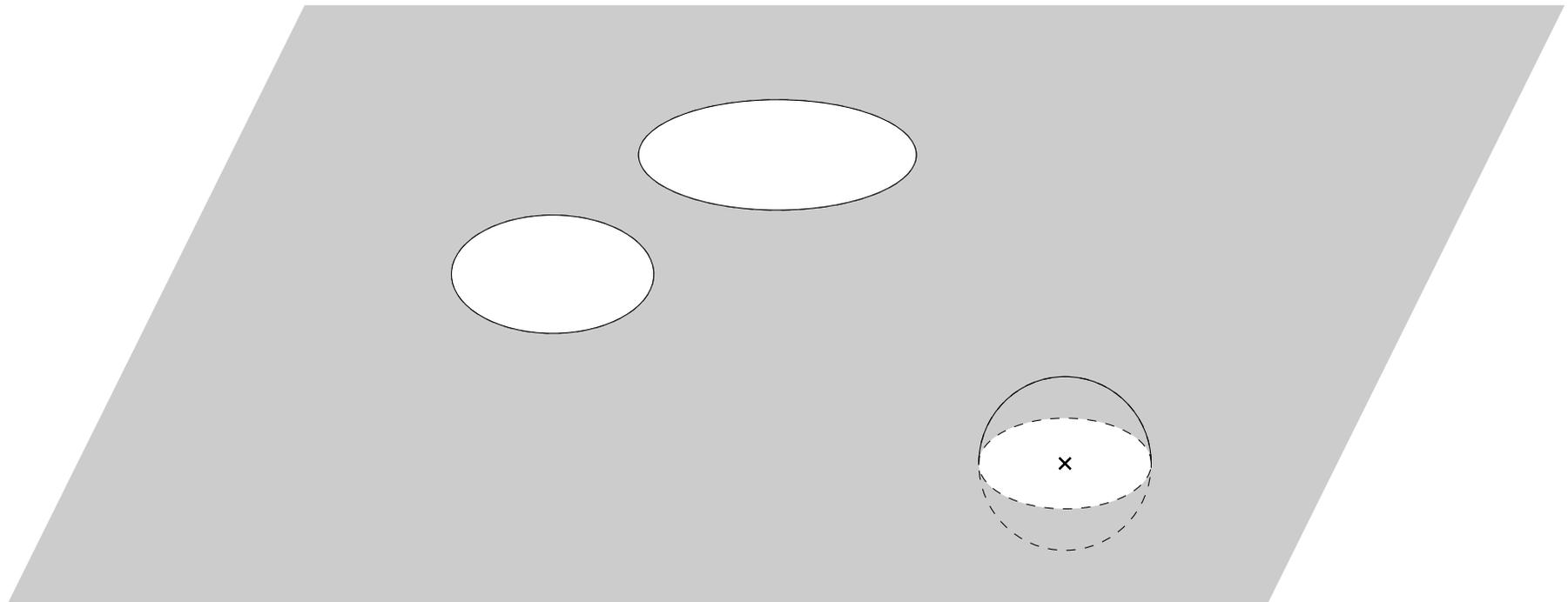
Question: les boules sont-elles gonflables?



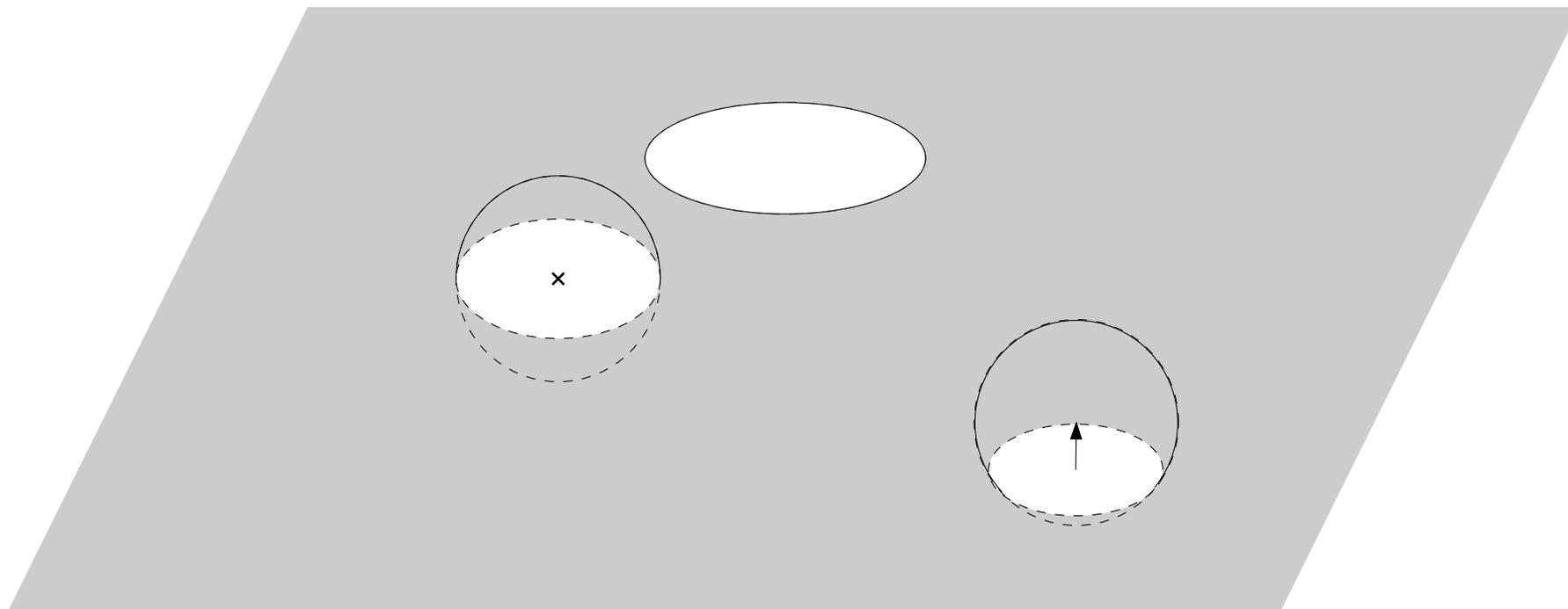
Exemple: ★ espace ambiant planaire
★ une seule dimension de gonflement



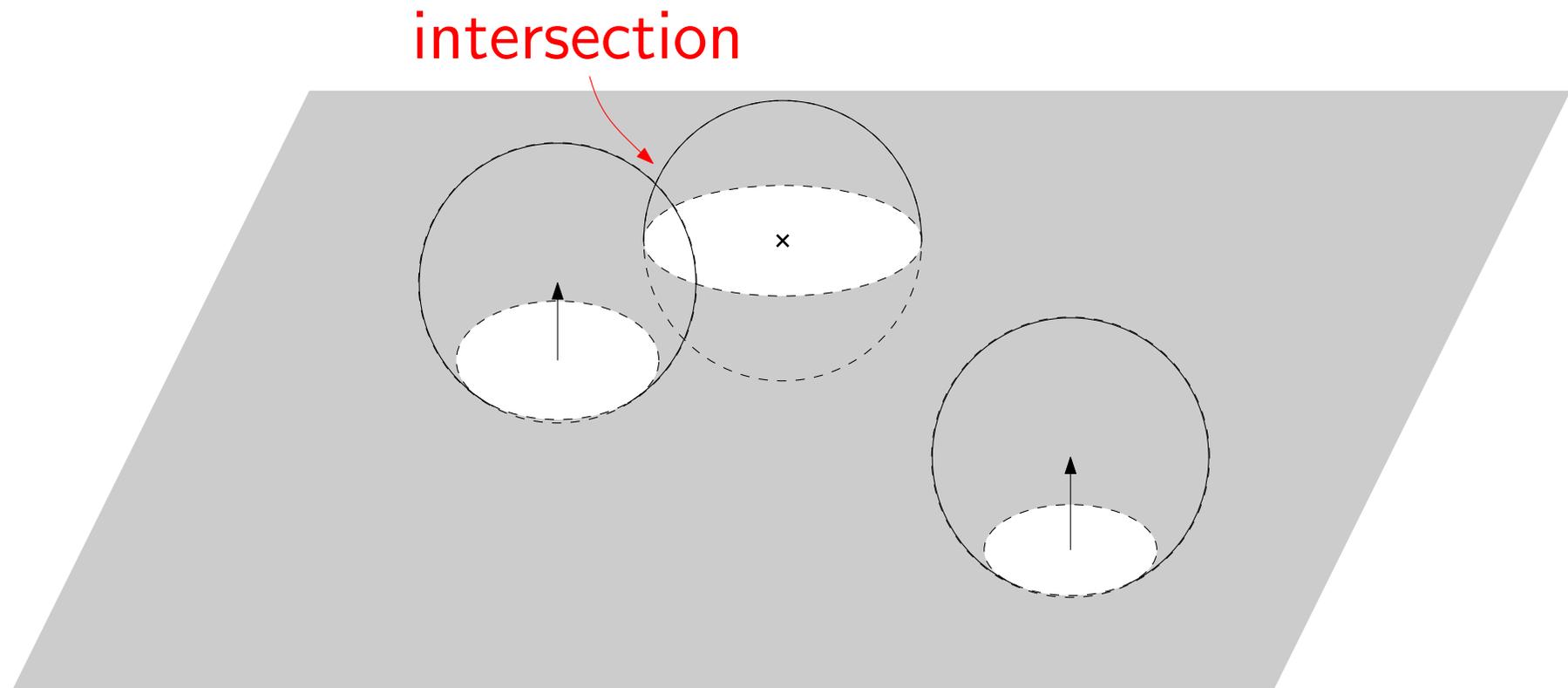
Exemple: ★ espace ambiant planaire
★ une seule dimension de gonflement



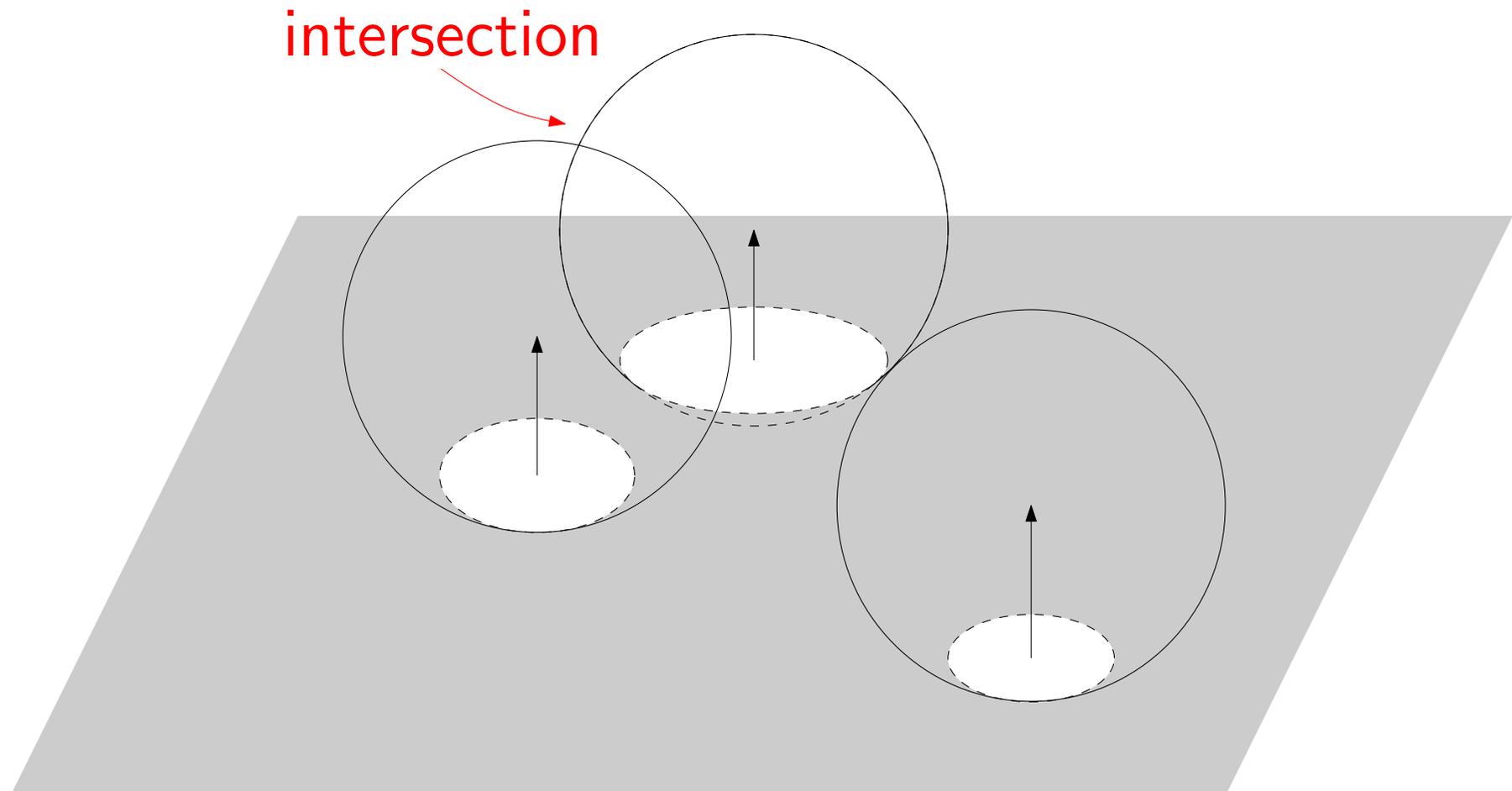
Exemple: ★ espace ambiant planaire
★ une seule dimension de gonflement



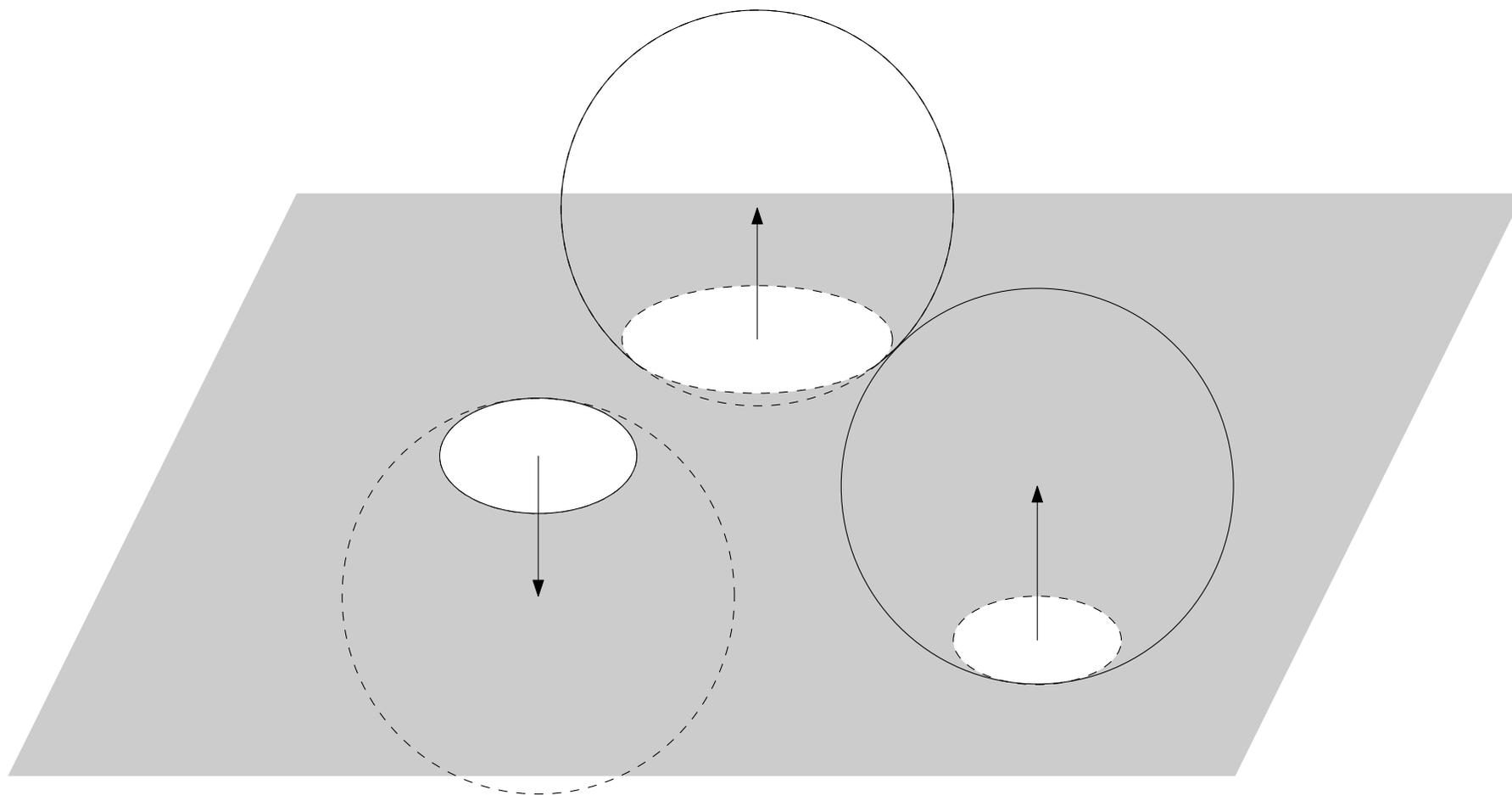
Exemple: ★ espace ambiant planaire
★ une seule dimension de gonflement



Exemple: ★ espace ambiant planaire
★ une seule dimension de gonflement



Exemple: ★ espace ambiant planaire
★ une seule dimension de gonflement



Définition

Boules gonflables de \mathbb{R}^d



intersection

d'une famille de boules disjointes de $\mathbb{R}^{d+\delta}$ de rayon ρ
avec un sous-espace de dimension d

Définition

Boules gonflables de \mathbb{R}^d



intersection

d'une famille de boules disjointes de $\mathbb{R}^{d+\delta}$ de rayon ρ
avec un sous-espace de dimension d

δ : dimension de gonflement

d : dimension de l'espace ambiant

ρ : rayon de gonflement

Définition

Boules gonflables de \mathbb{R}^d



intersection

d'une famille de boules disjointes de $\mathbb{R}^{d+\delta}$ de rayon ρ
avec un sous-espace de dimension d

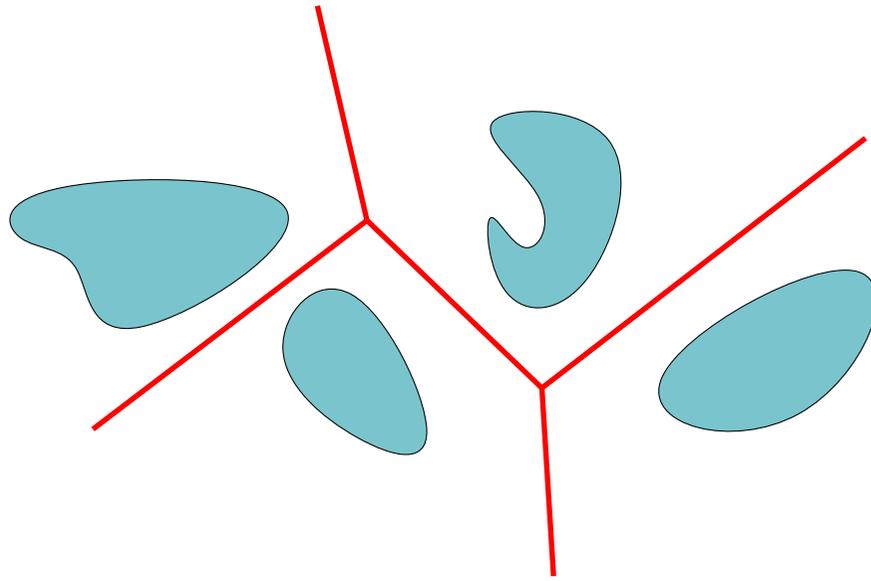
δ : dimension de gonflement

d : dimension de l'espace ambiant

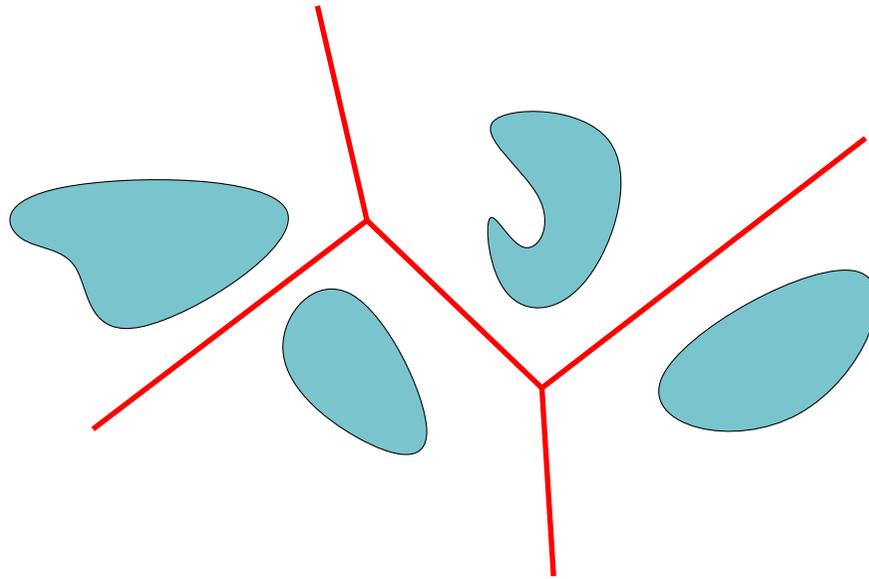
ρ : rayon de gonflement

Notion sur les familles de boules
stable par intersection

Application au recouvrement d'objets par des polytopes

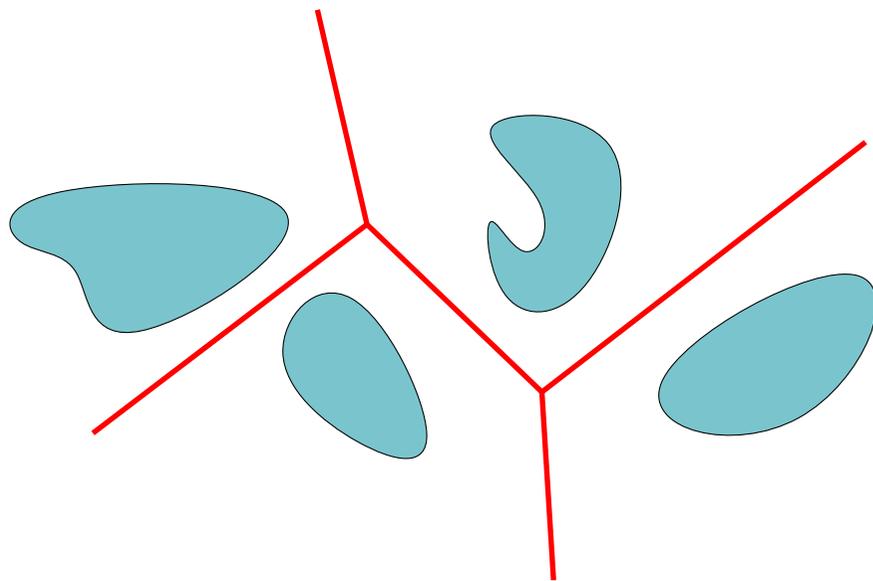


Application au recouvrement d'objets par des polytopes



- ★ cas de boules disjointes de même rayon:
on construit le diagramme de Voronoï des centres

Application au recouvrement d'objets par des polytopes



- ★ cas de boules disjointes de même rayon:
on construit le diagramme de Voronoï des centres
- ★ cas des boules gonflables
on intersecte le diagramme de Voronoï
des boules gonflées avec l'espace ambiant

Présentation du problème

1-gonflabilité

δ -gonflabilité ($\delta \geq 2$)

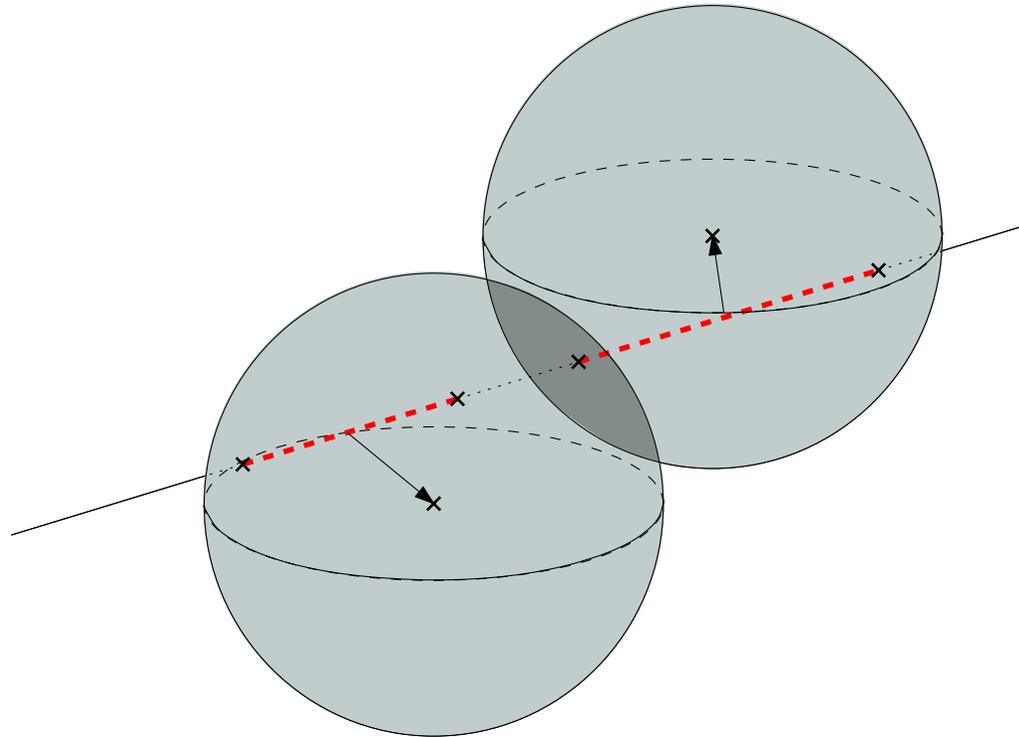
Rayon critique

Lm Gonflable $\Rightarrow \rho \geq R_C$

Rayon critique

Lm Gonflable $\Rightarrow \rho \geq R_C$

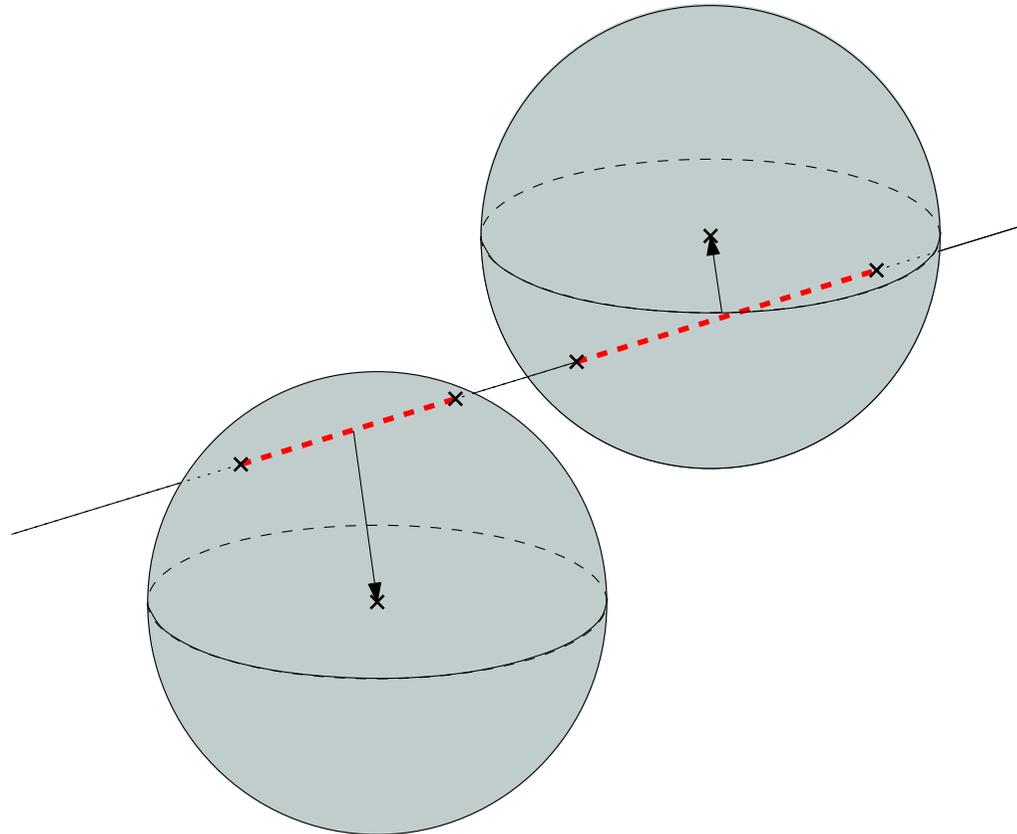
Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.



Rayon critique

Lm Gonflable $\Rightarrow \rho \geq R_C$

Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.

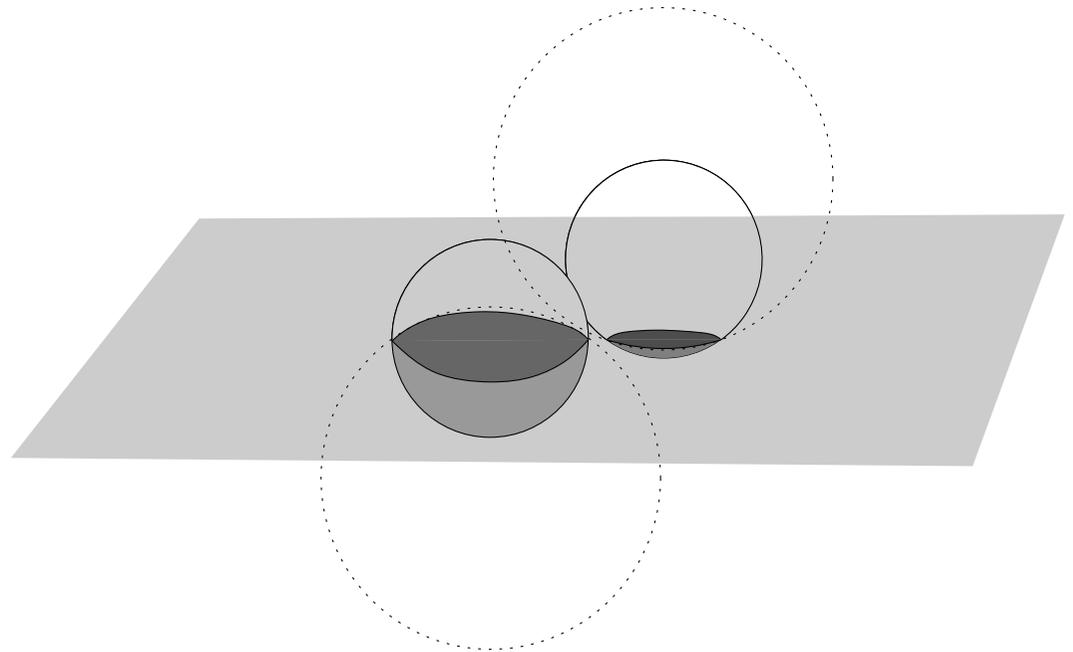
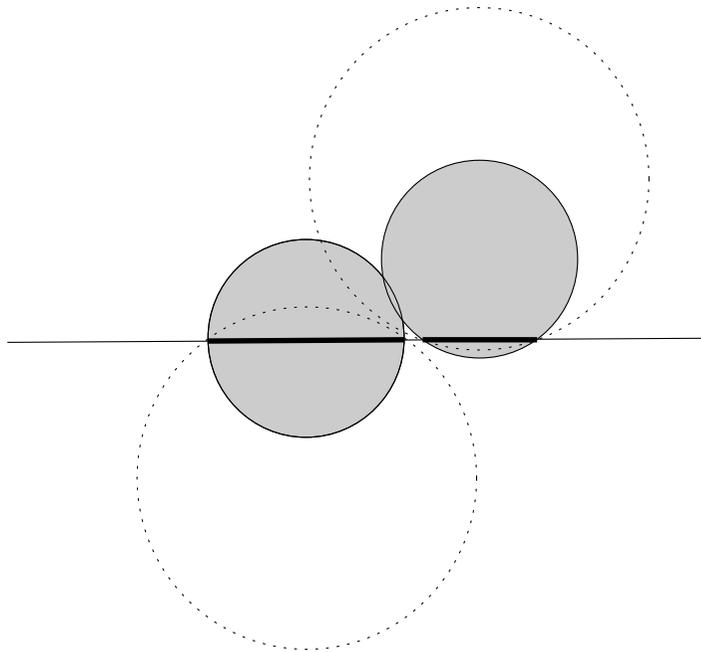


Rayon critique

Lm Gonflable $\Rightarrow \rho \geq R_C$

Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.

Lm B_i et B_j gonflables $\Rightarrow \rho \geq \rho_{ij}$



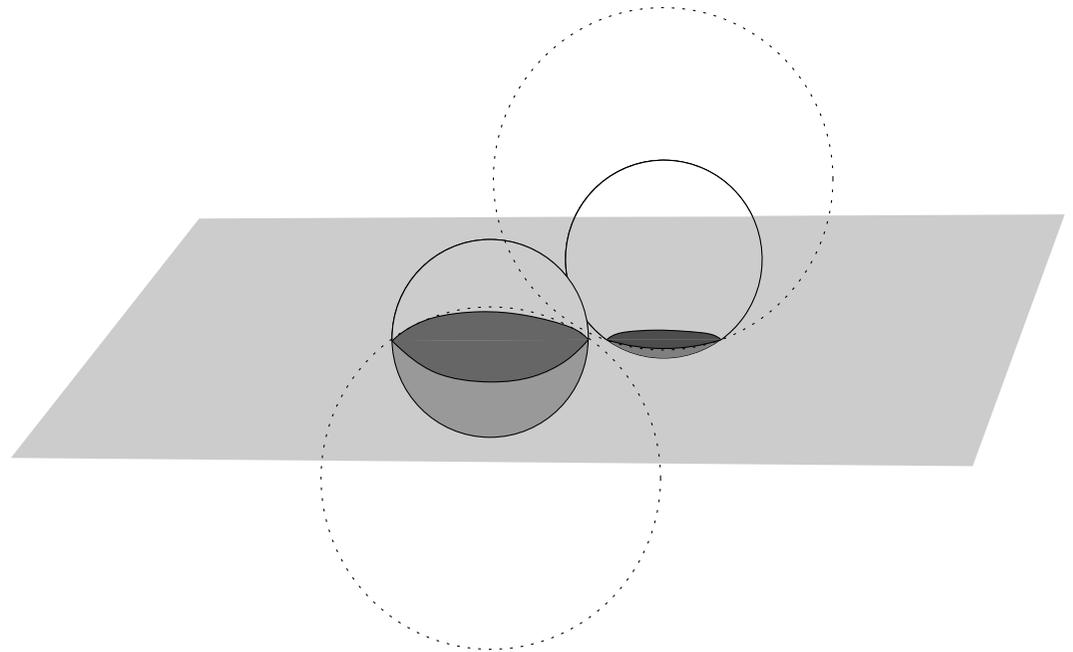
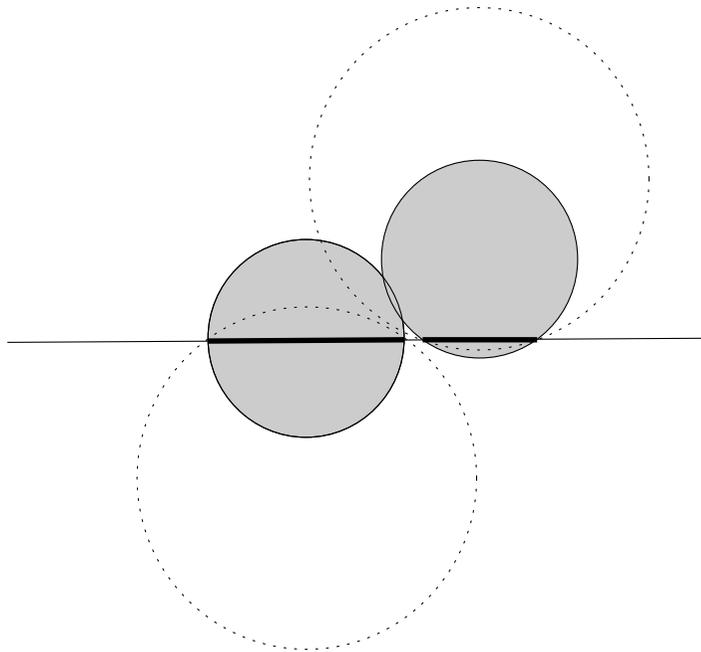
Rayon critique

Lm Gonflable $\Rightarrow \rho \geq R_C$

Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.

Lm B_i et B_j gonflables $\Rightarrow \rho \geq \rho_{ij}$

Rq on peut avoir $\rho_{ij} > \max(r_i, r_j)$

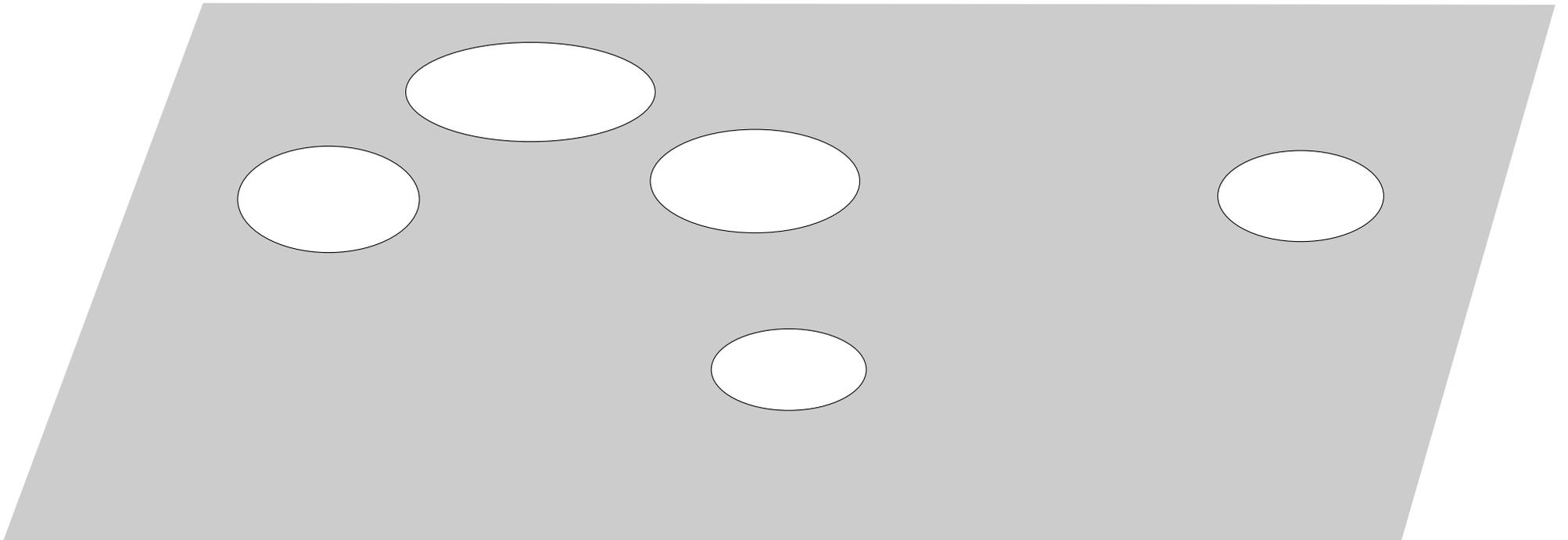


Graphe de contraintes

1-gonflabilité: deux directions possibles $\vec{x}_i = \pm \vec{\epsilon}$

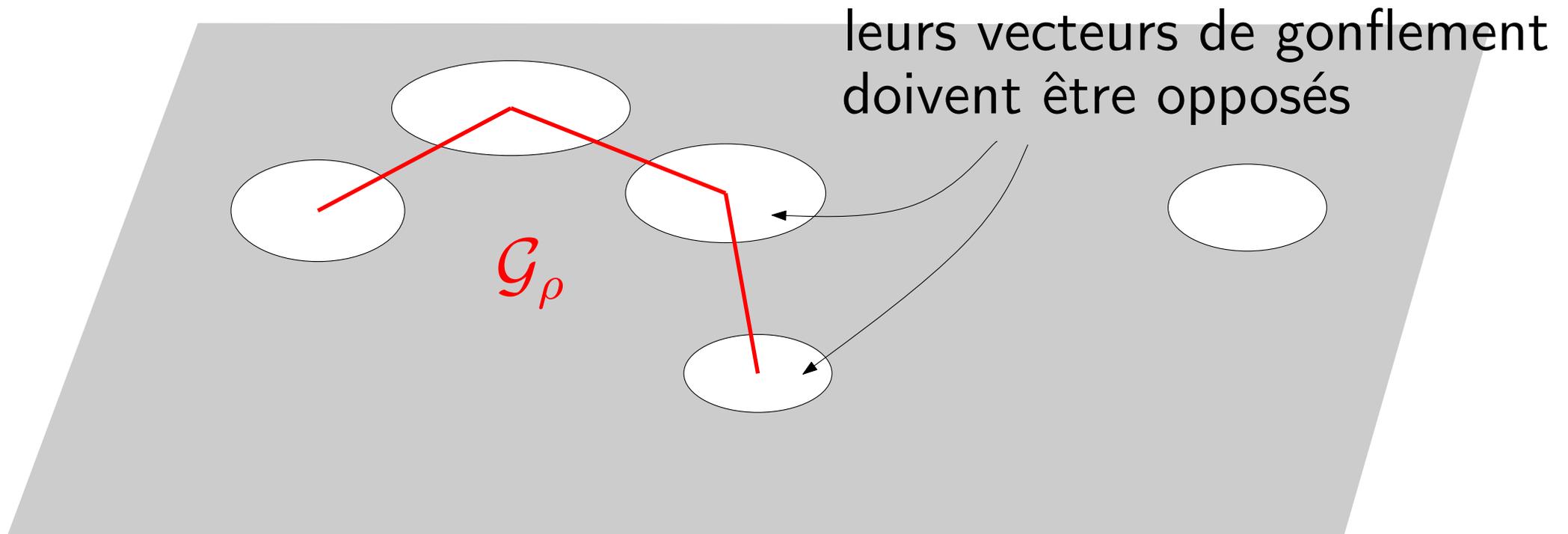
Graphe de contraintes

1-gonflabilité: deux directions possibles $\vec{x}_i = \pm \vec{\epsilon}$



Graphe de contraintes

1-gonflabilité: deux directions possibles $\vec{x}_i = \pm \vec{\epsilon}$

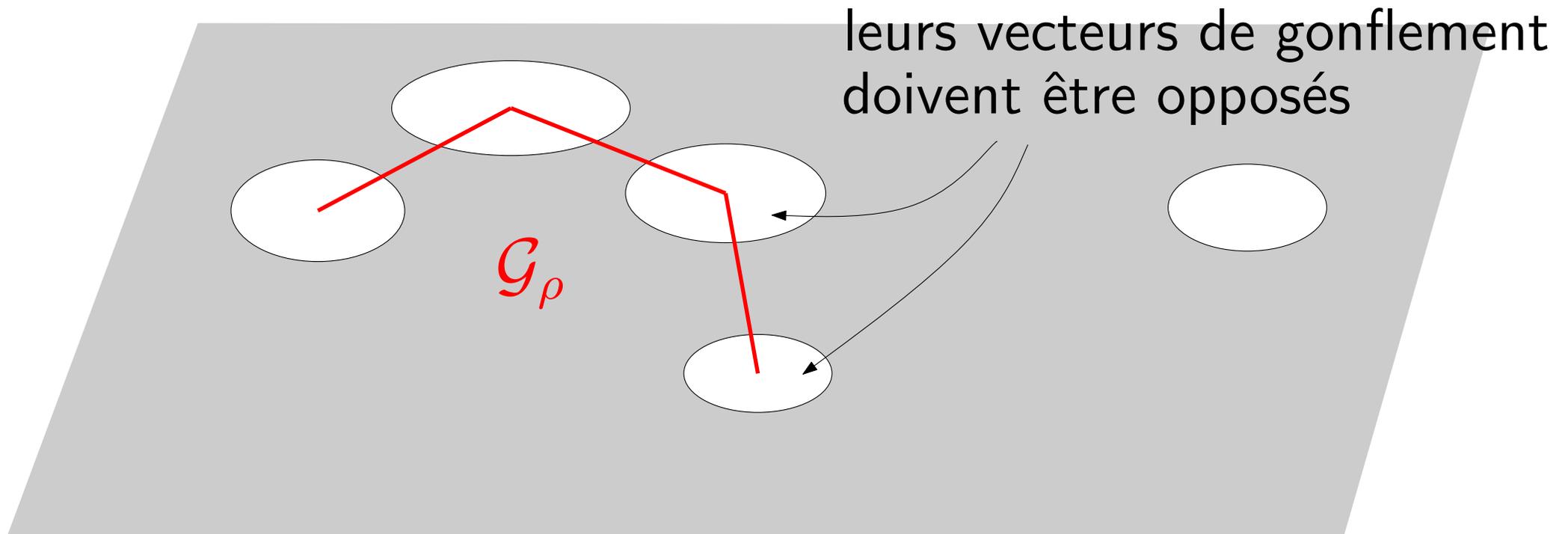


Graphe de contraintes

Lm Les boules sont 1-gonflables ssi

★ $\rho \geq R_C$

★ G_ρ est 2-coloriable.

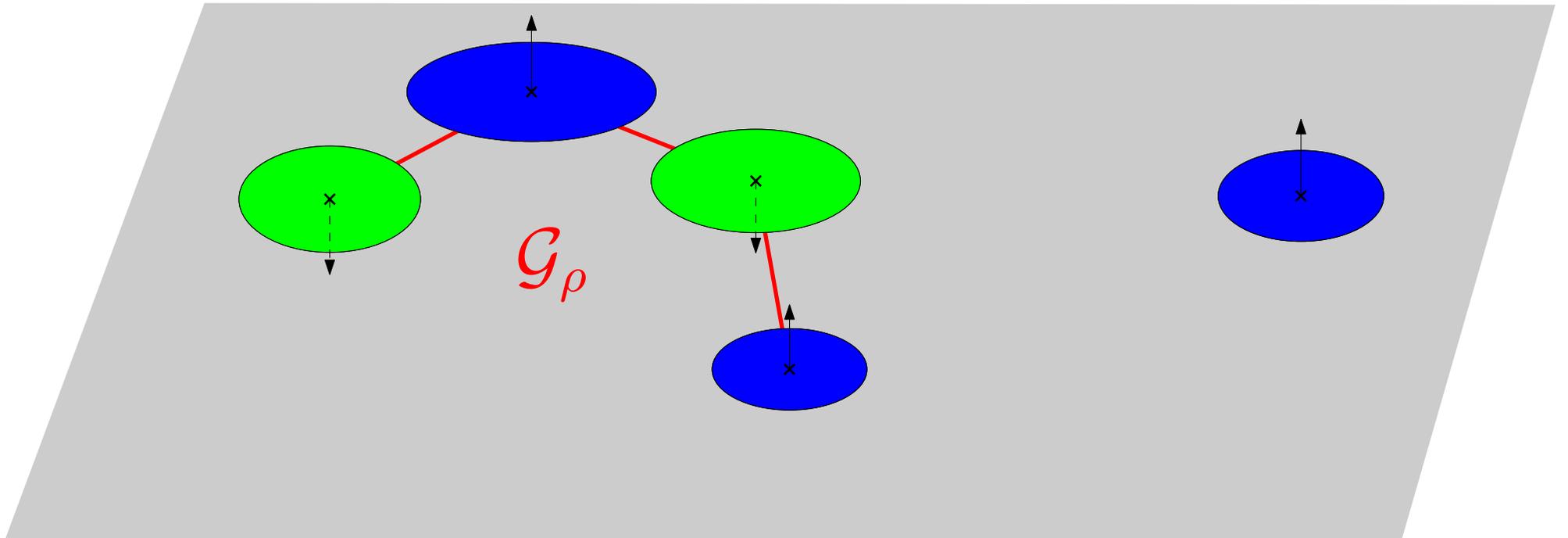


Graphe de contraintes

Lm Les boules sont 1-gonflables ssi

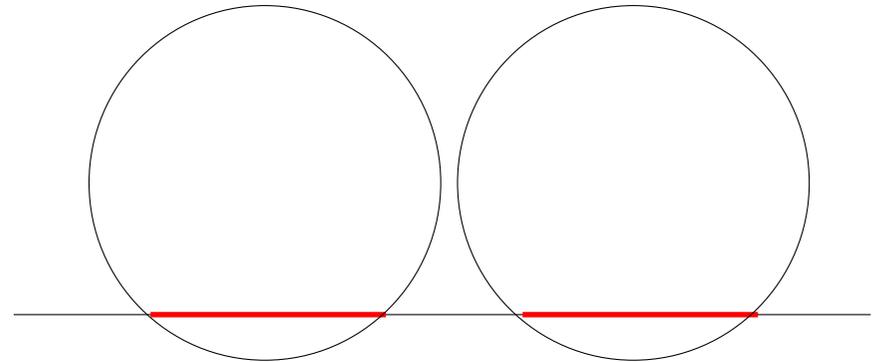
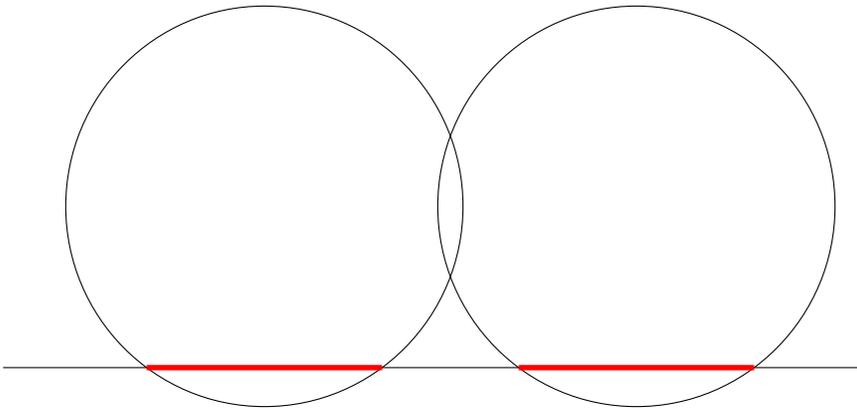
★ $\rho \geq R_C$

★ G_ρ est 2-coloriable.



Monotonie des G_ρ

Lm $G_{\rho'}$ est un sous-graphe de G_ρ pour $\rho' \leq \rho$.



ALGORITHME de 1-gonflabilité

1. Construire le graphe \mathcal{G}_ρ pour $\rho = R_C$.
2. Calculer une 2-coloration.
3. En déduire un gonflement.

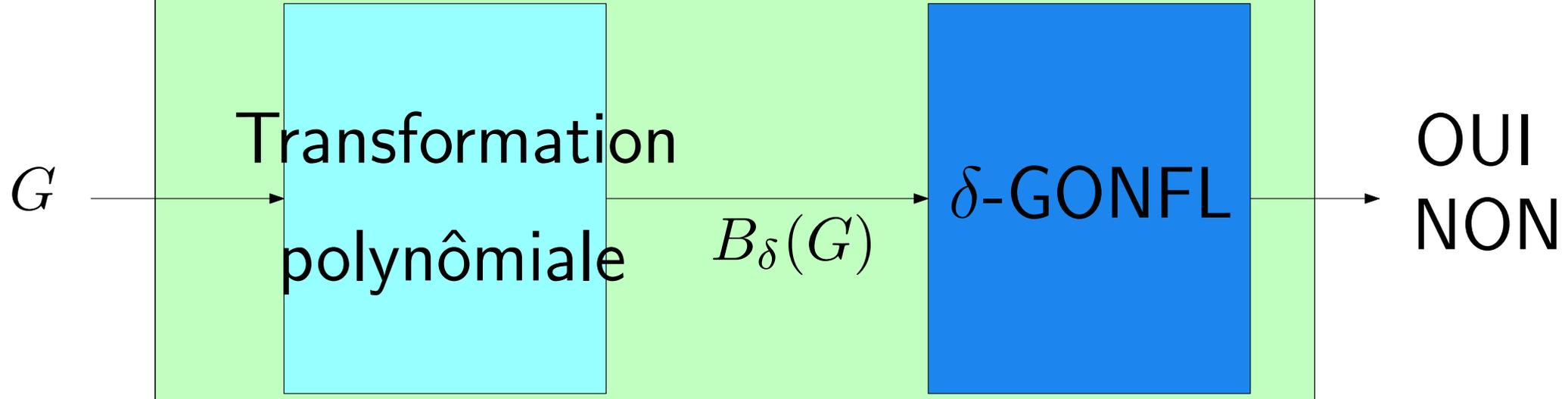
Complexité $O(n^2)$ opérations arithmétiques

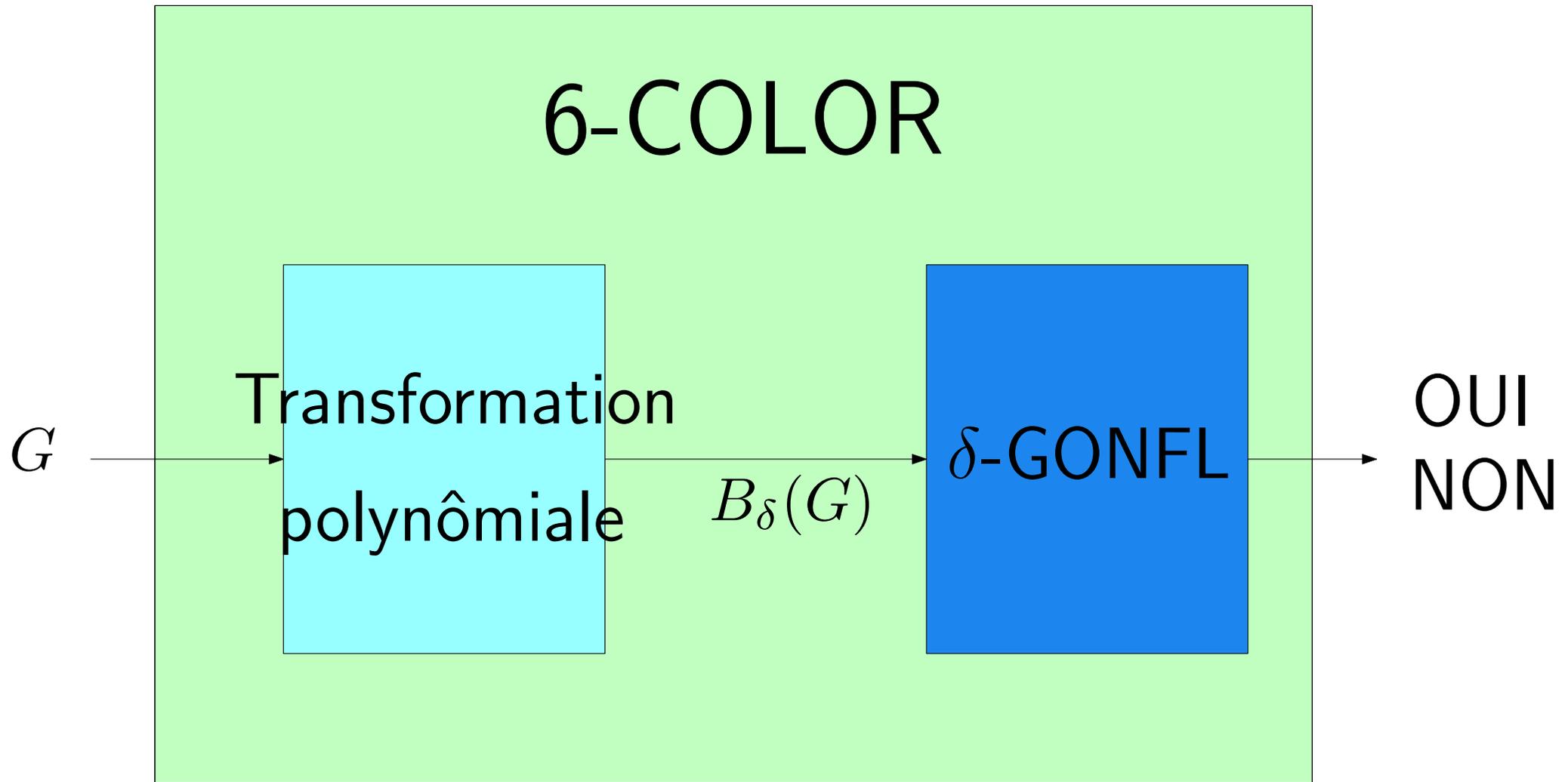
Présentation du problème

1-gonflabilité

δ -gonflabilité ($\delta \geq 2$)

6-COLOR





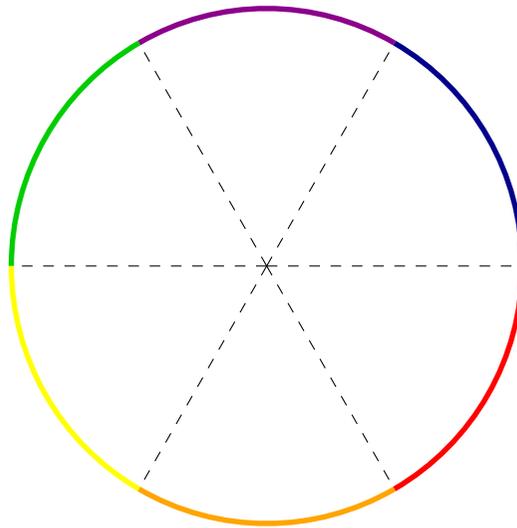
Thm G est 6-coloriable ssi $B_\delta(G)$ est δ -gonflable.

Idée

★ un sommet de $G \rightarrow$ un vecteur de gonflement de S^1

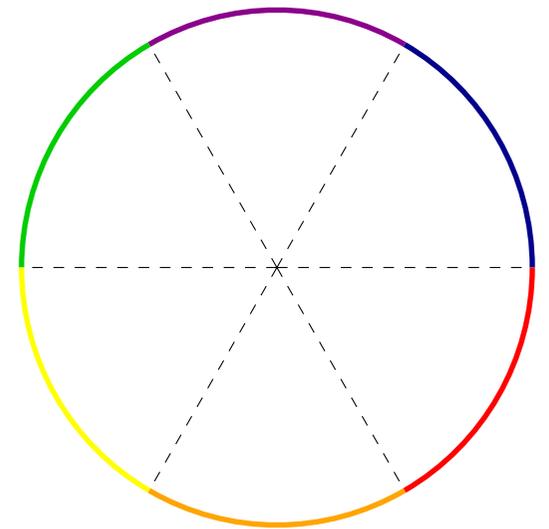
Idée

- ★ un sommet de $G \rightarrow$ un vecteur de gonflement de S^1
- ★ une couleur \rightarrow un secteur d'angle $\pi/3$ sur S^1

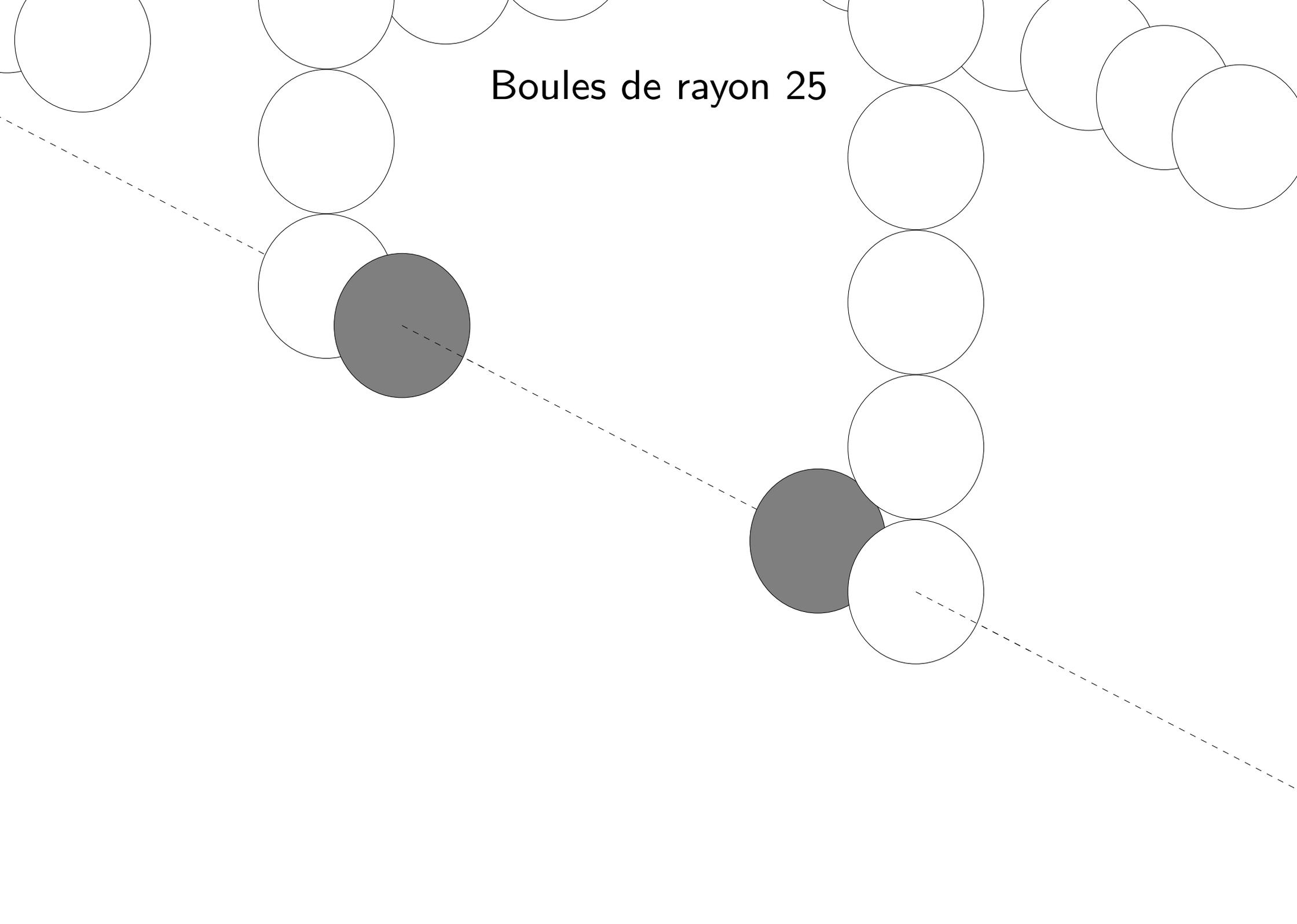


Idée

- ★ un sommet de $G \rightarrow$ un vecteur de gonflement de S^1
- ★ une couleur \rightarrow un secteur d'angle $\pi/3$ sur S^1
- ★ les vecteurs de gonflement de deux sommets adjacents sont dans des secteurs distincts (ie angle $\geq \pi/3$)



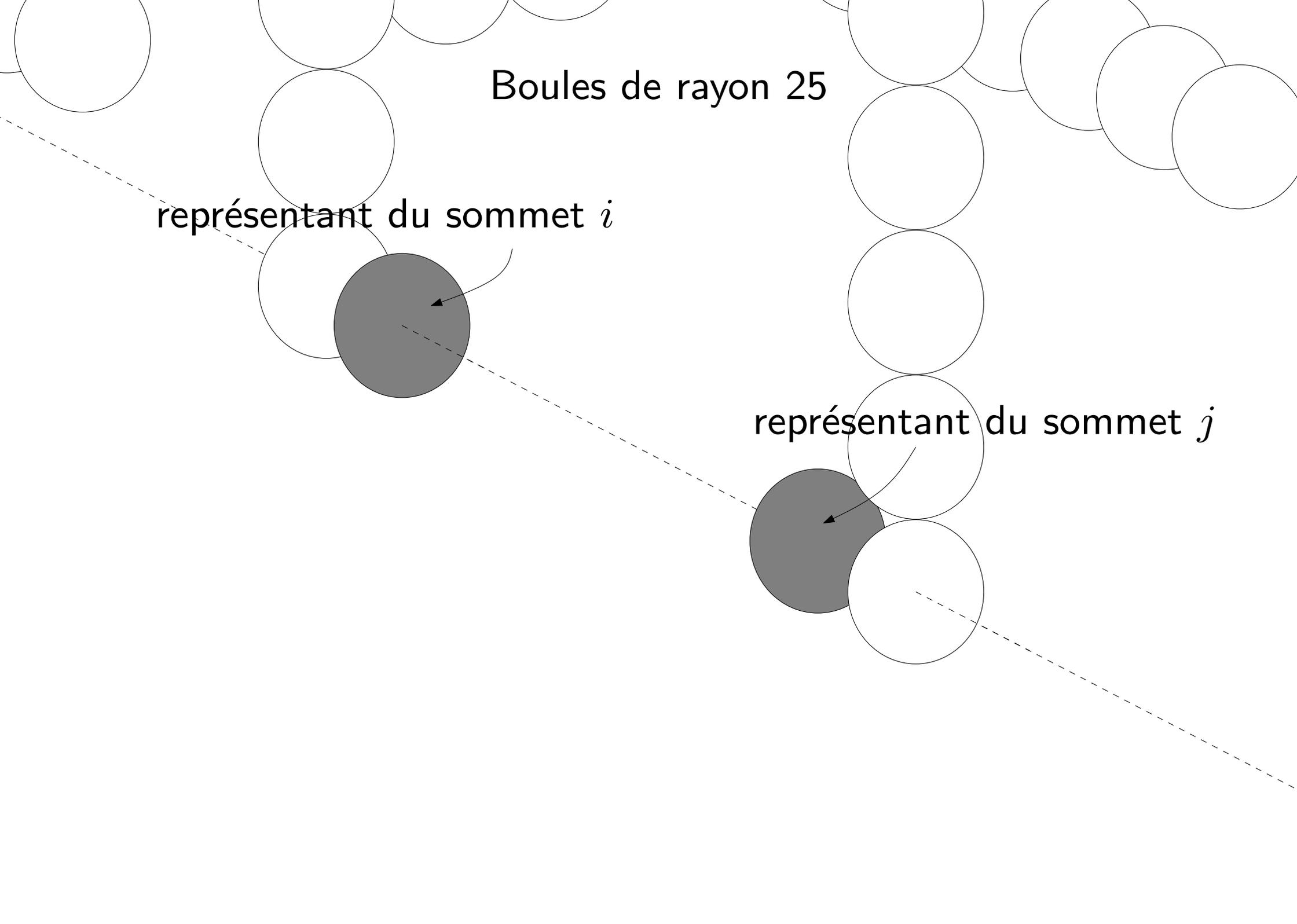
Boules de rayon 25



Boules de rayon 25

représentant du sommet i

représentant du sommet j

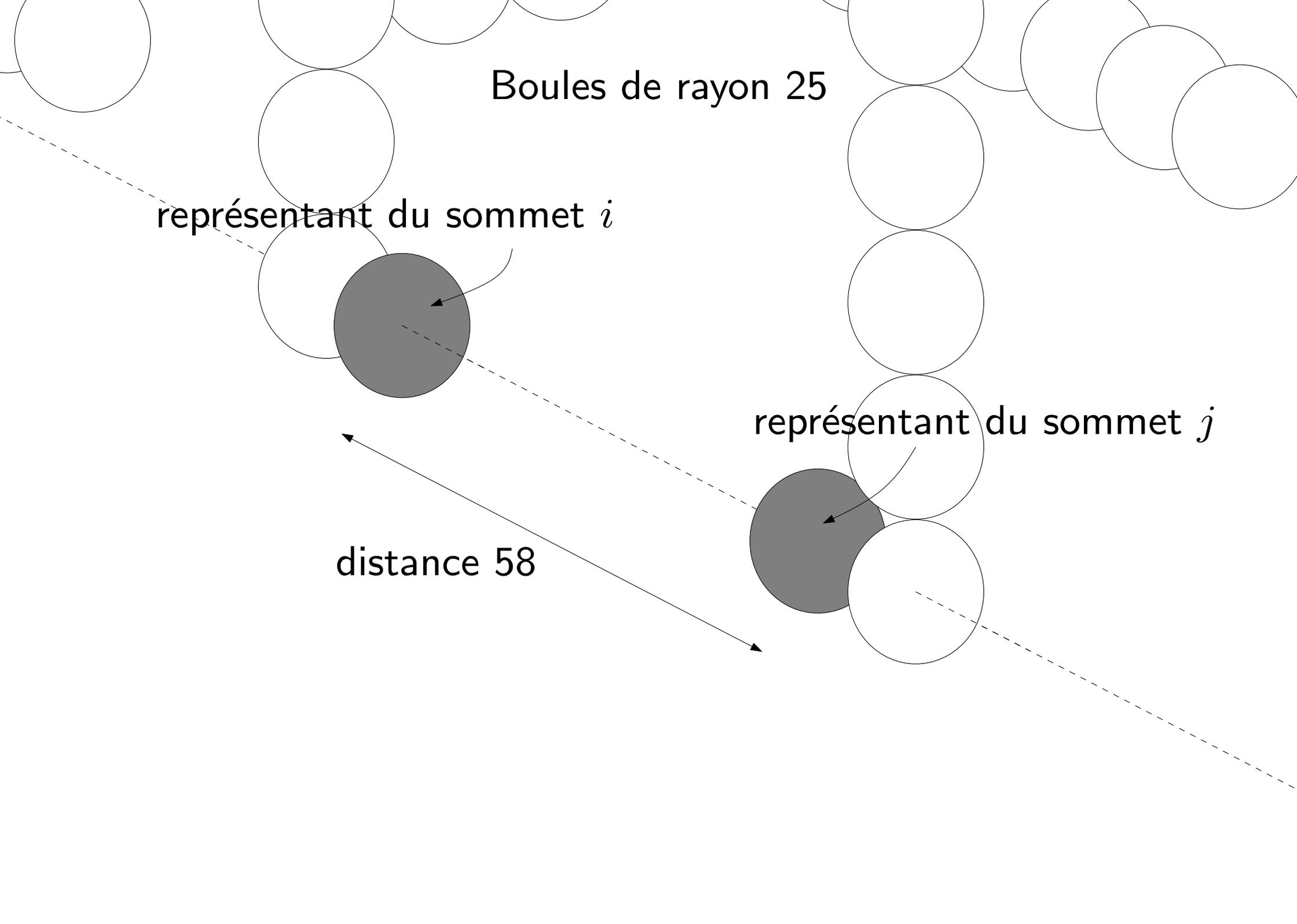


Boules de rayon 25

représentant du sommet i

représentant du sommet j

distance 58



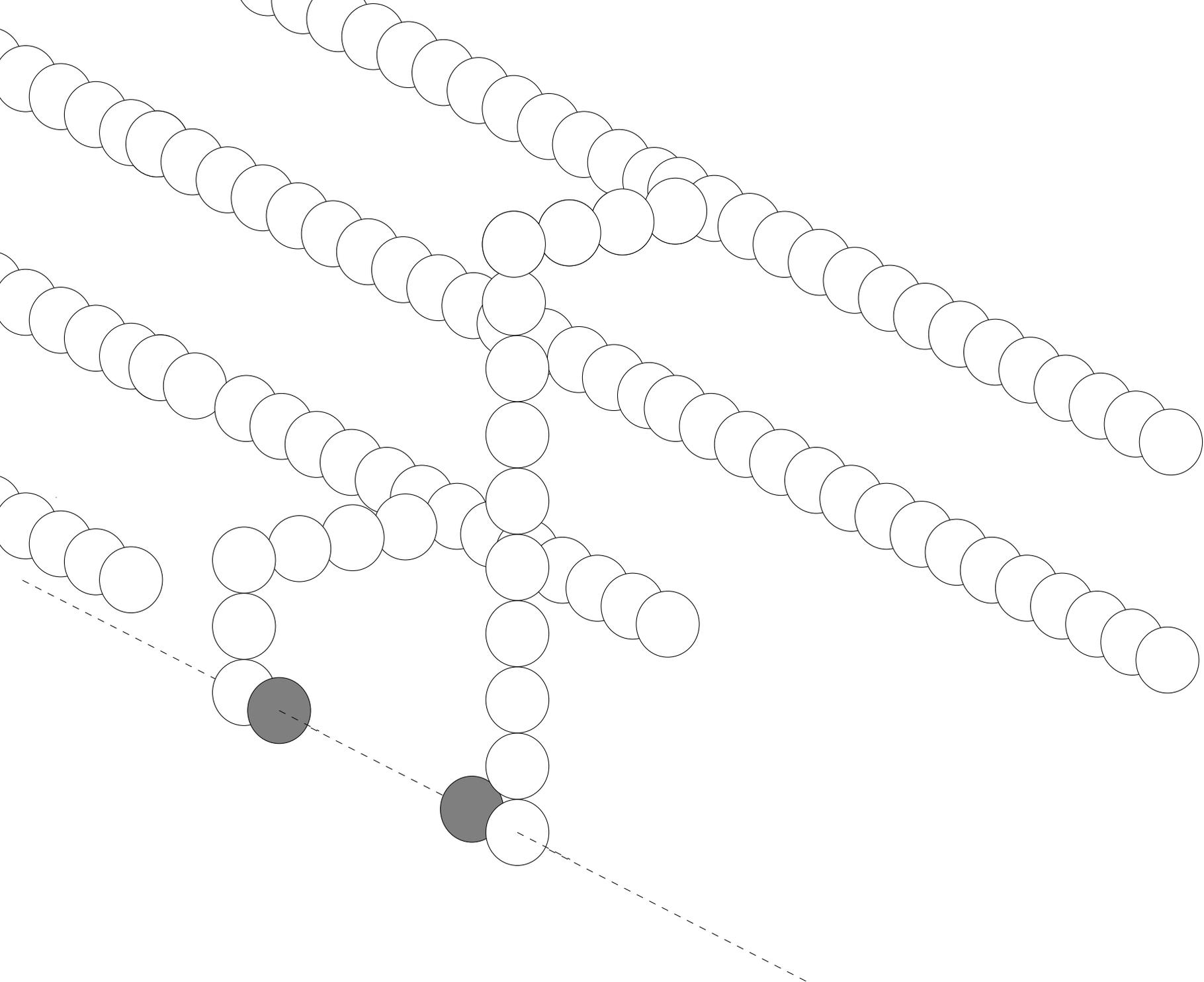
Boules de rayon 25

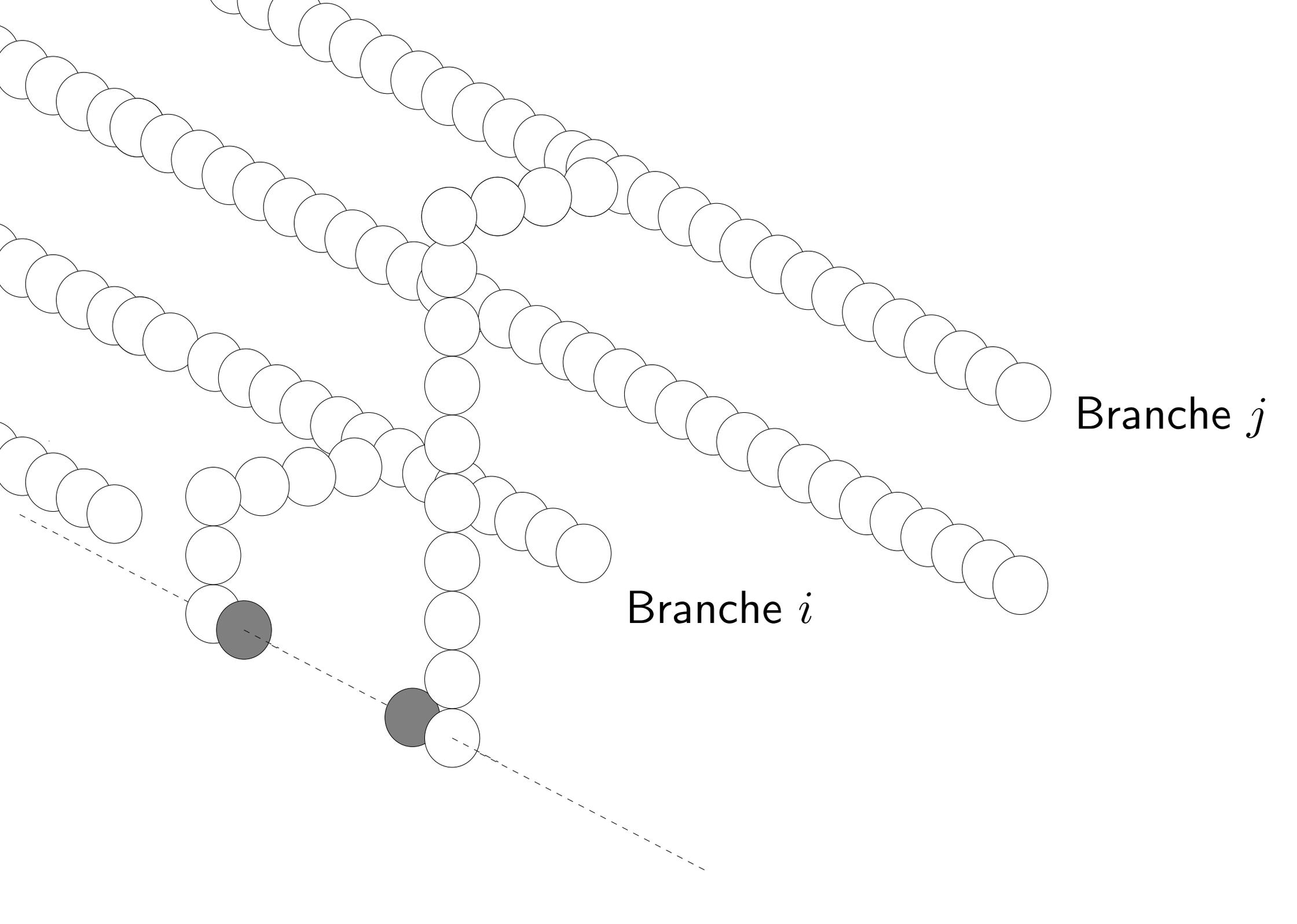
représentant du sommet i

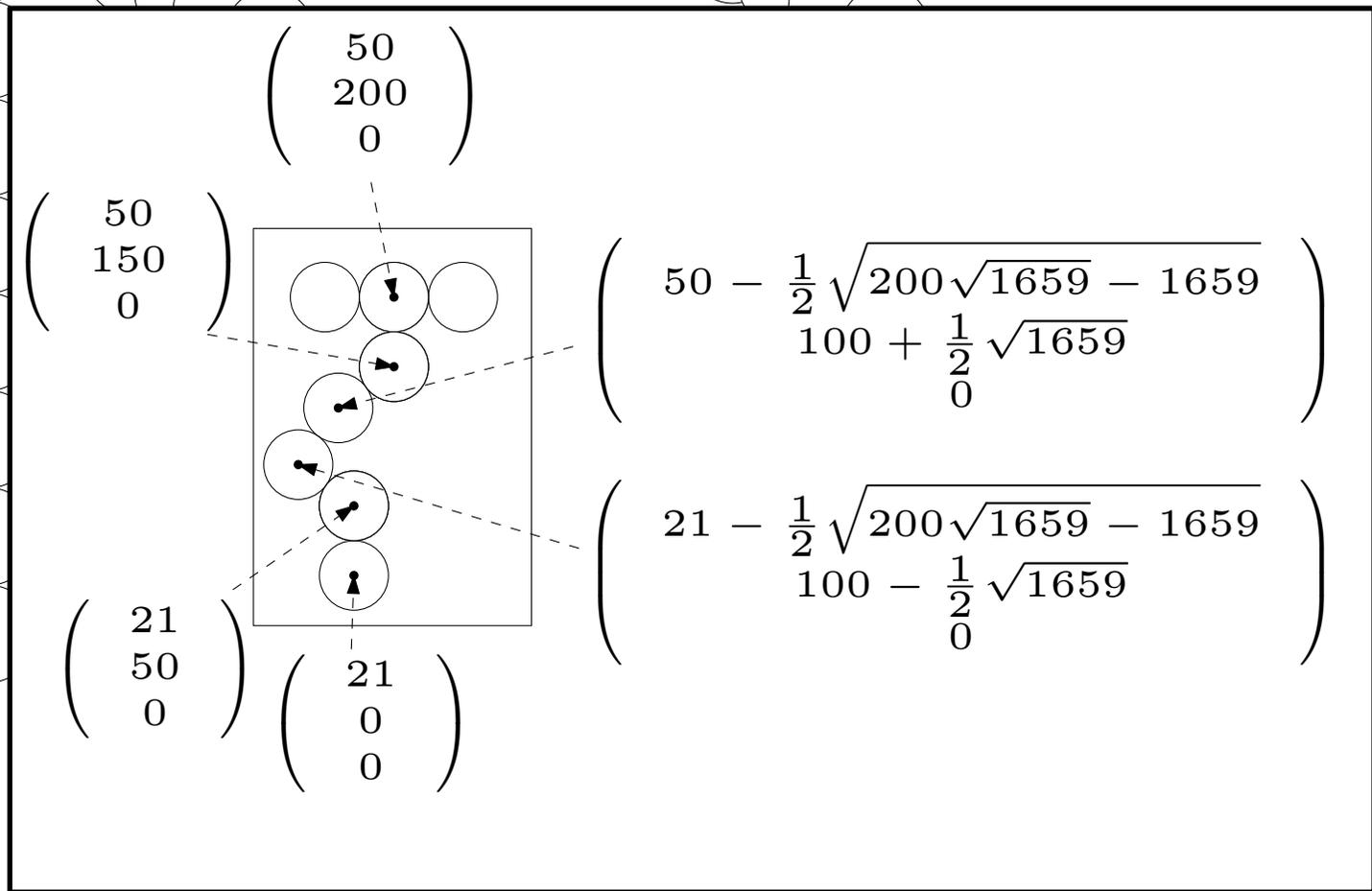
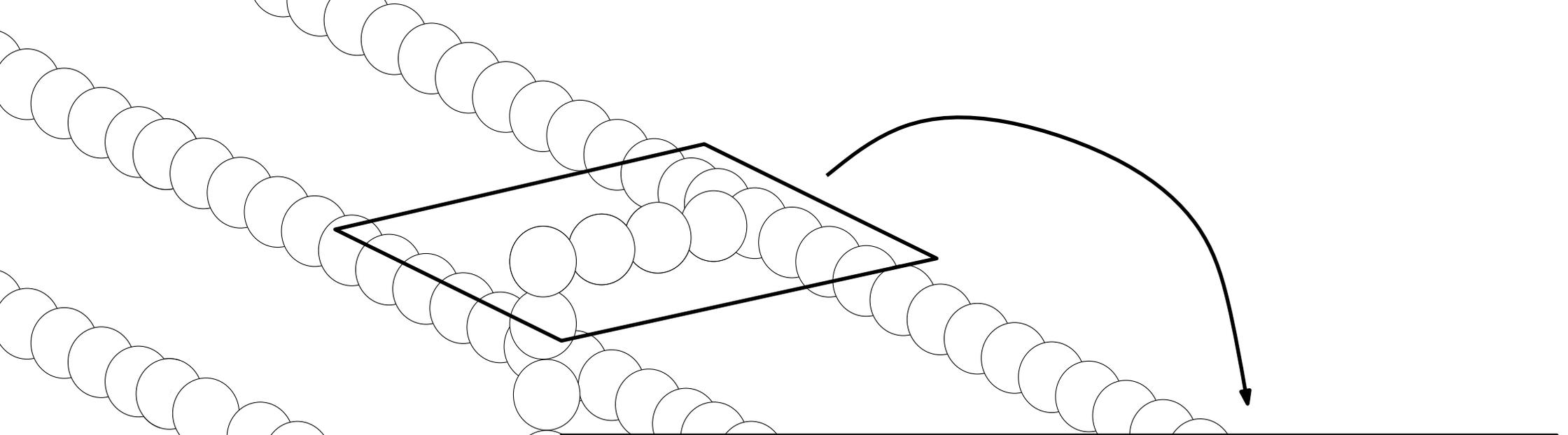
représentant du sommet j

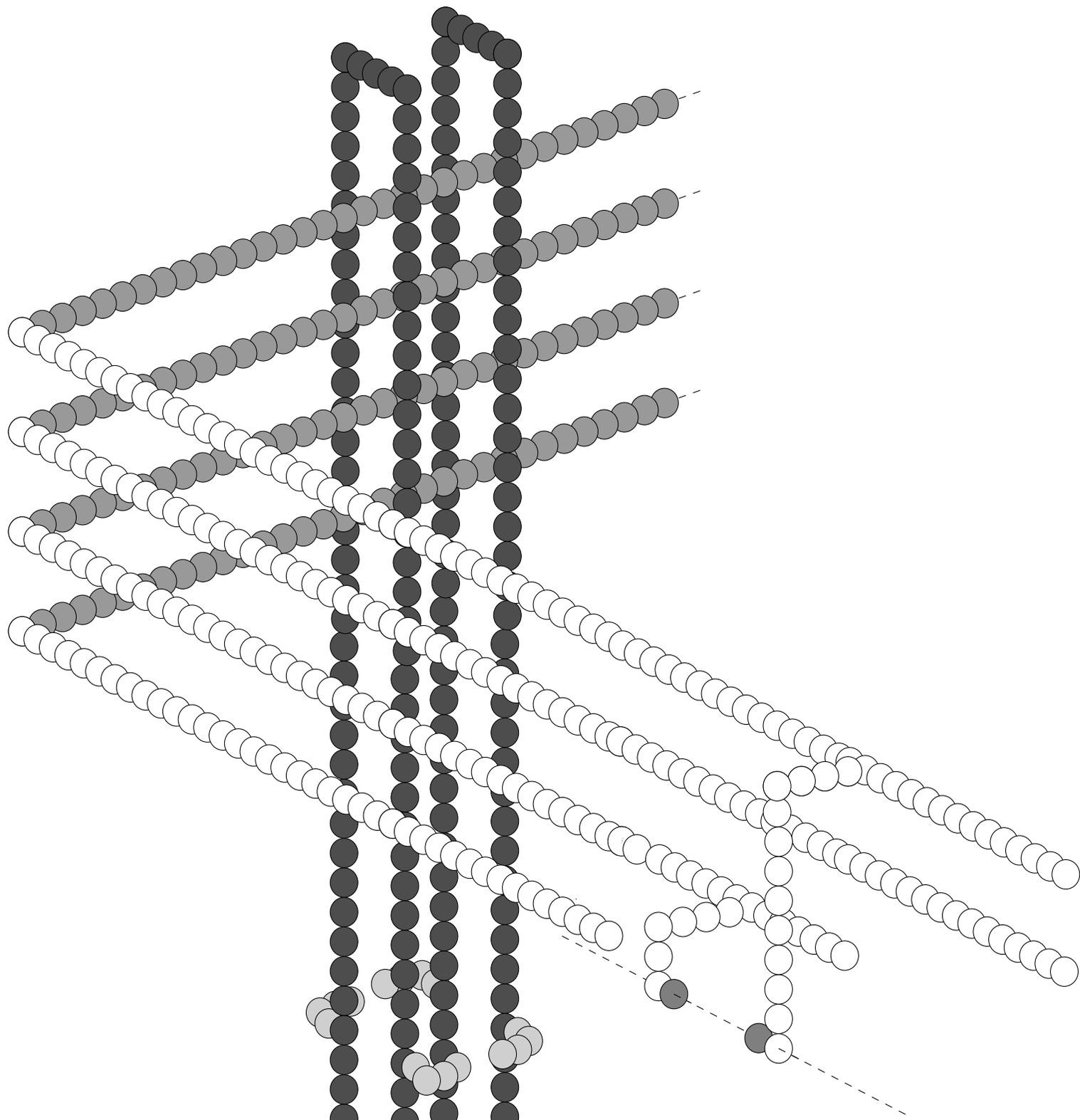
distance 58

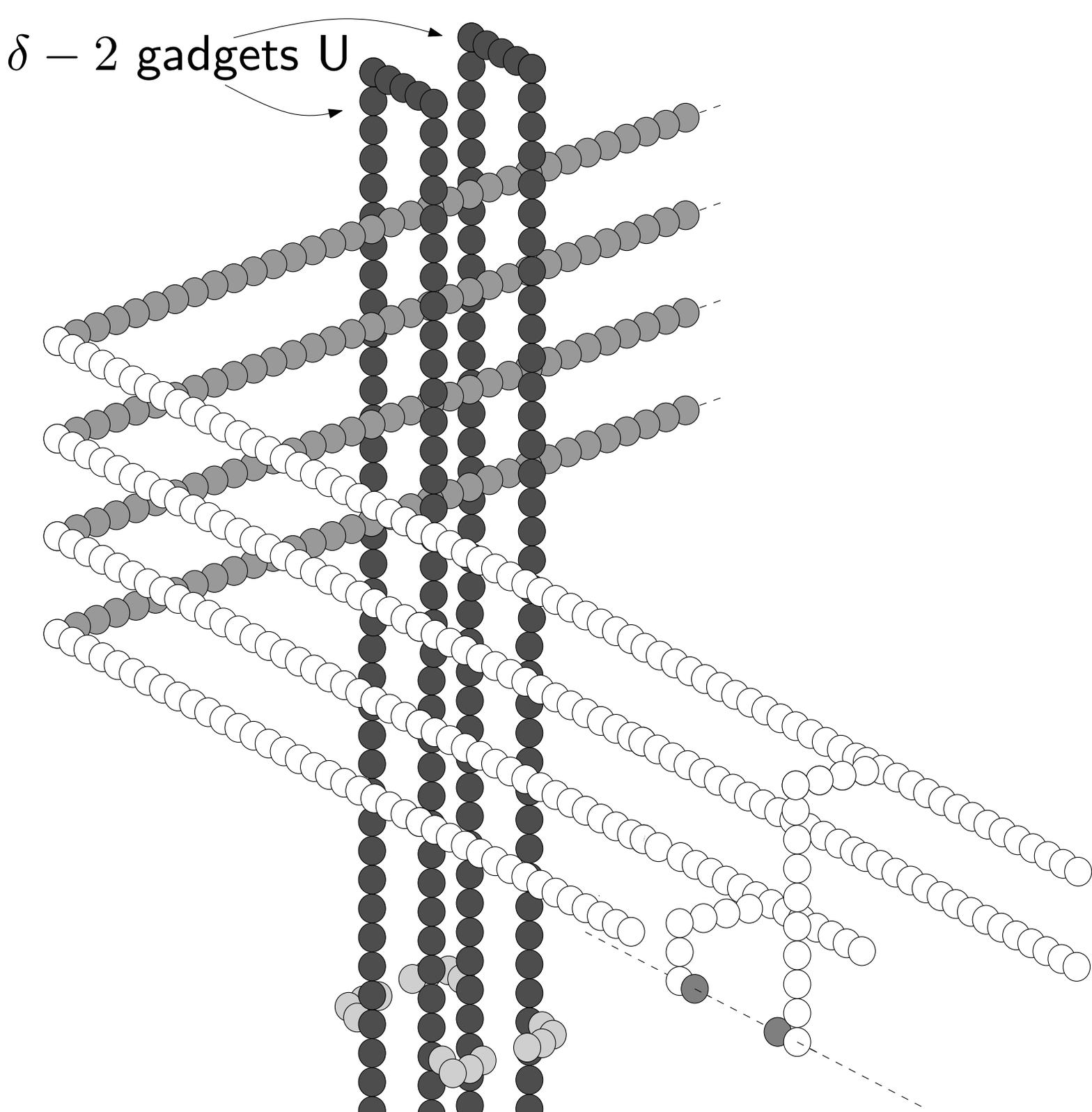
Lm Les boules grises sont gonflables pour $\rho = 37$.
Leurs vecteurs de gonflement forment alors un angle $\geq \pi/3$.



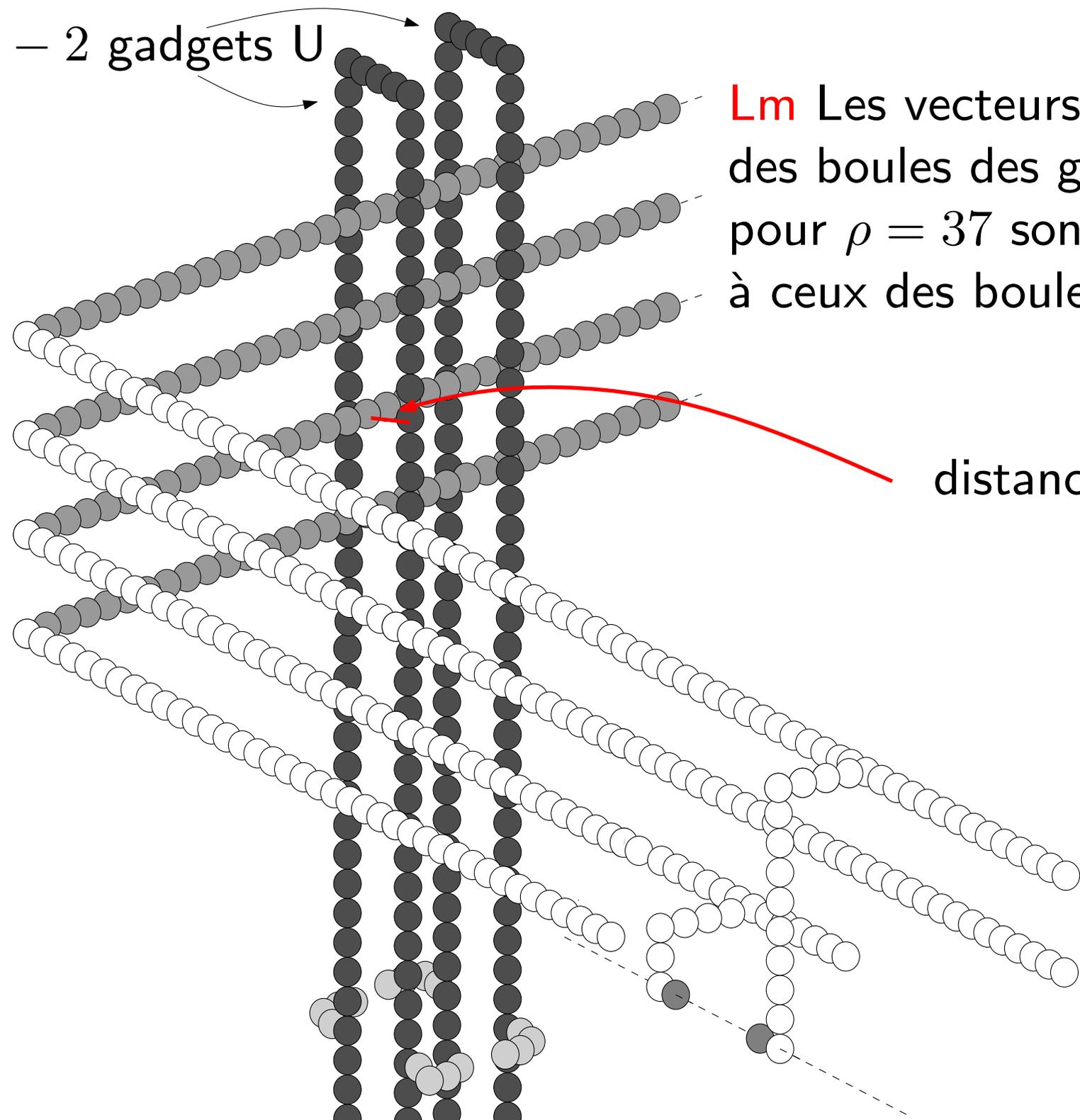








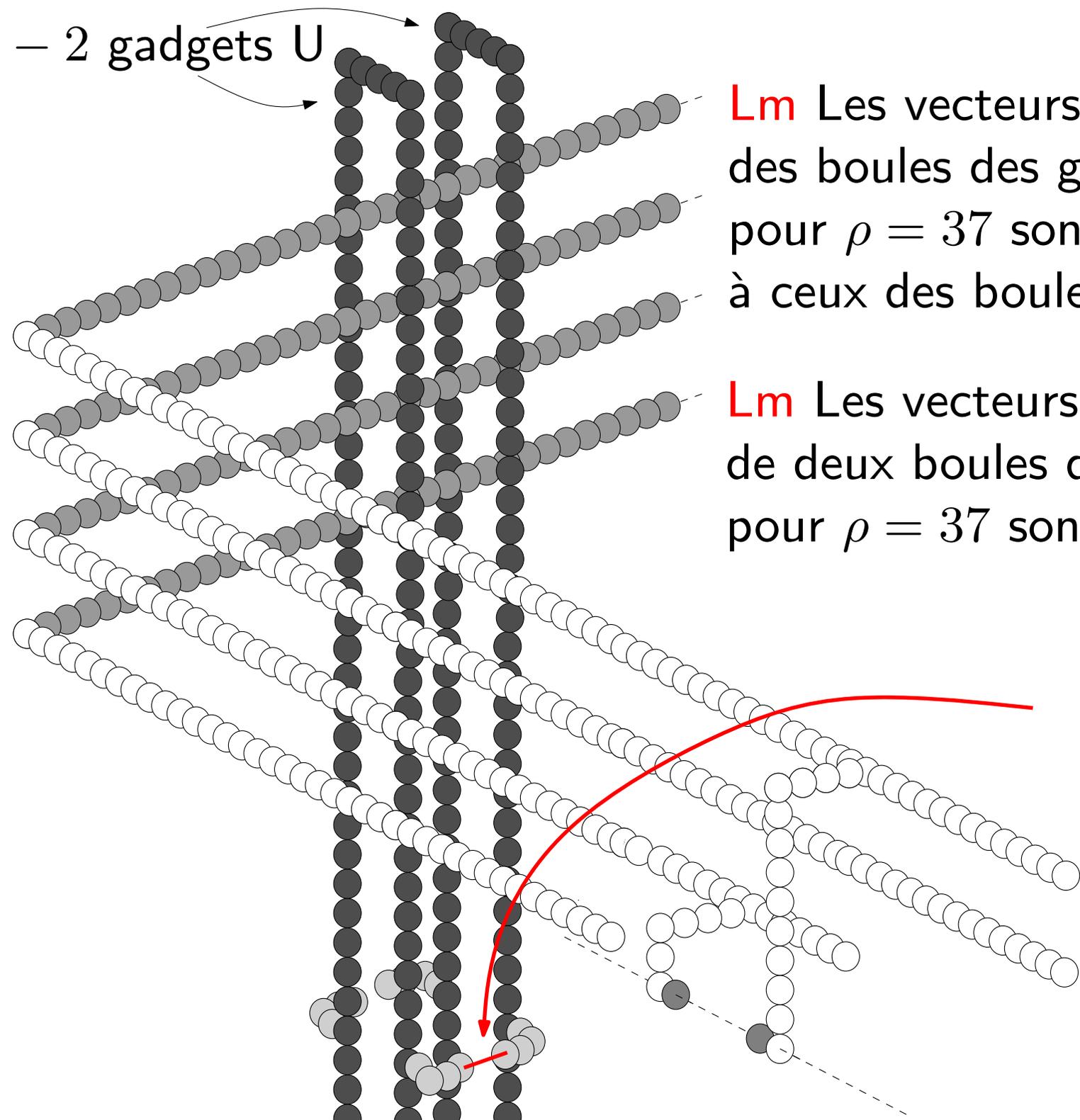
$\delta - 2$ gadgets U



Lm Les vecteurs de gonflement des boules des gadgets U pour $\rho = 37$ sont orthogonaux à ceux des boules de branche.

distance $2\sqrt{997}$

$\delta - 2$ gadgets U

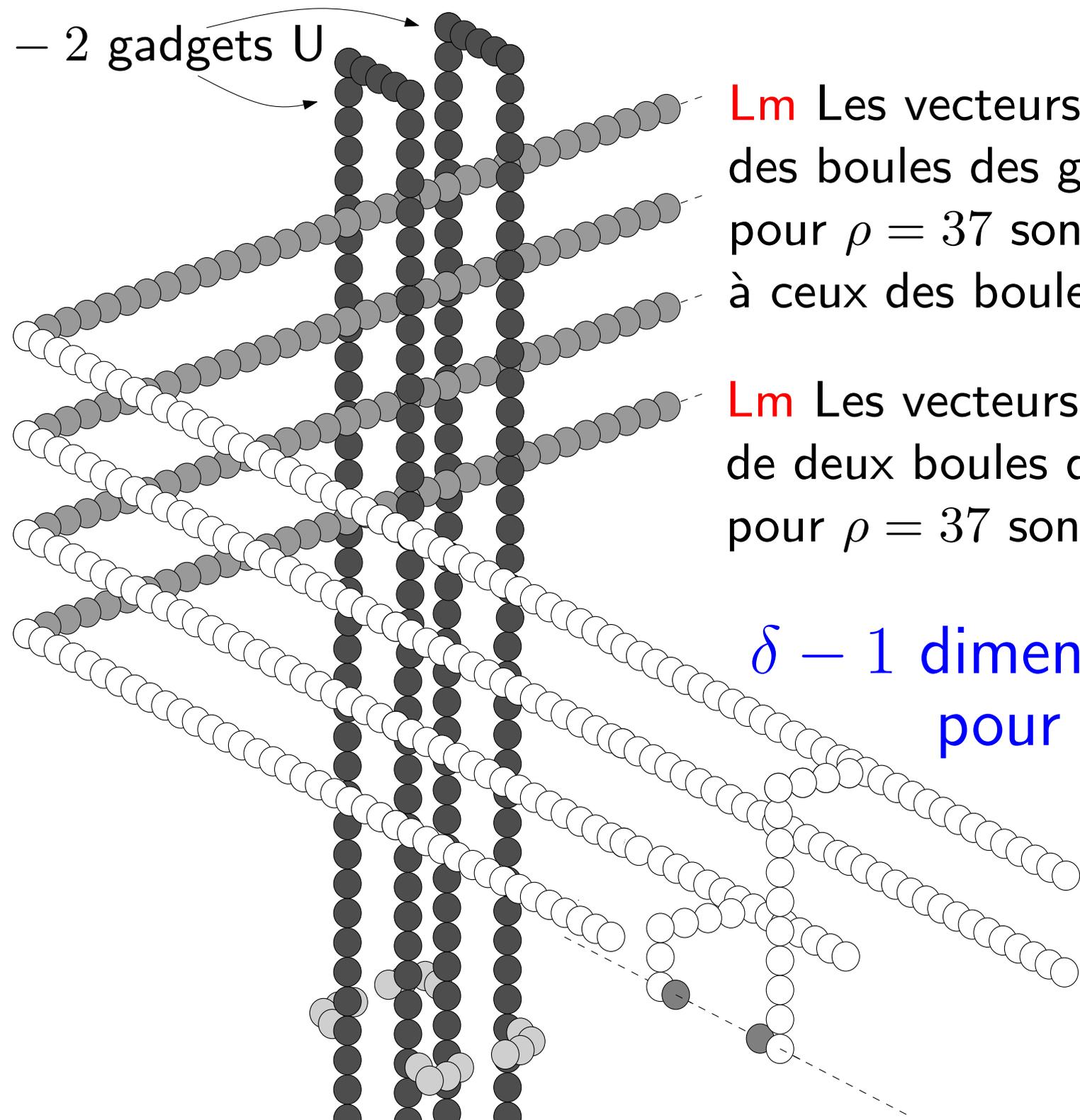


Lm Les vecteurs de gonflement des boules des gadgets U pour $\rho = 37$ sont orthogonaux à ceux des boules de branche.

Lm Les vecteurs de gonflement de deux boules de gadgets U distincts pour $\rho = 37$ sont orthogonaux.

distance $2\sqrt{997}$

$\delta - 2$ gadgets U

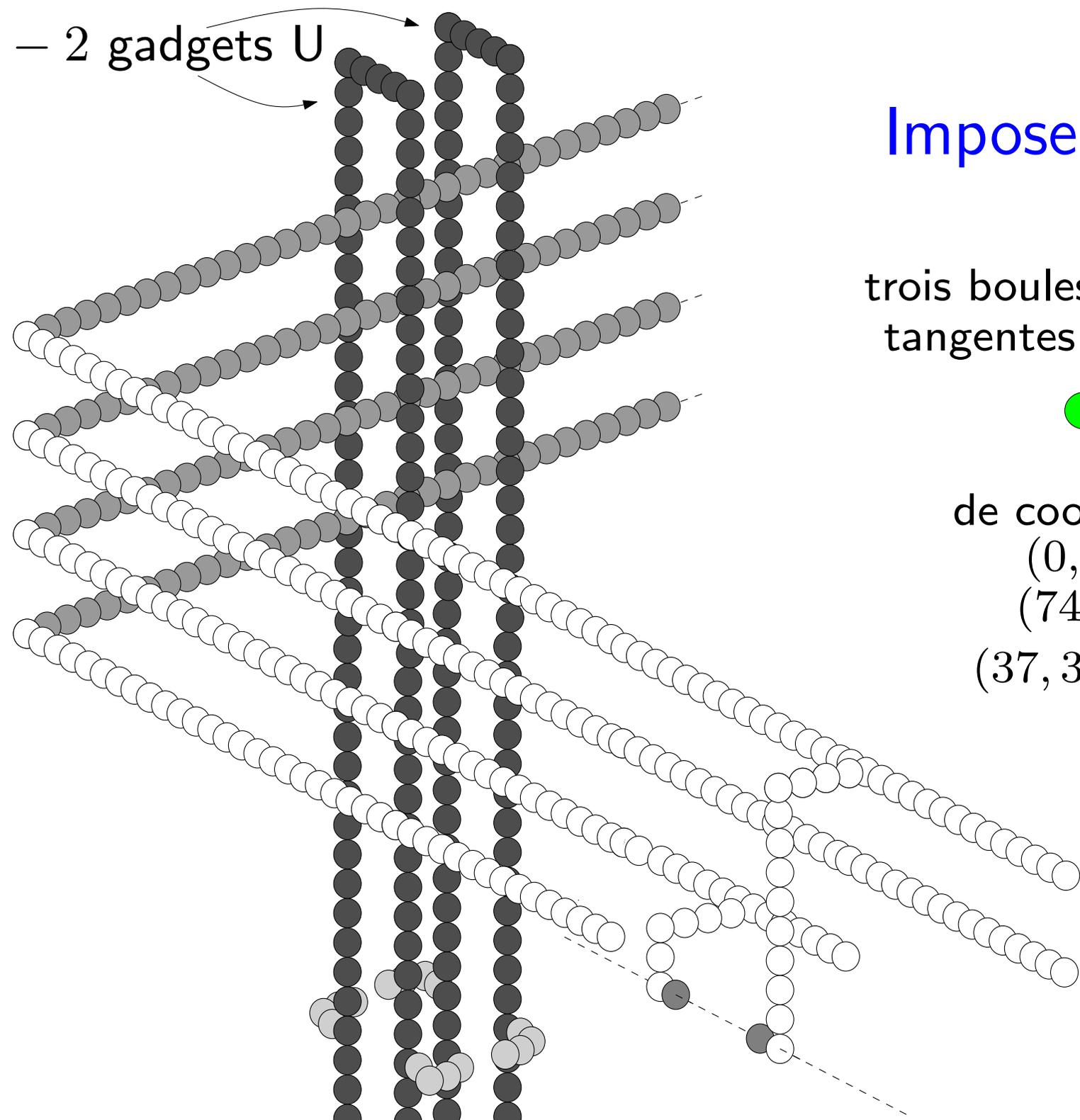


Lm Les vecteurs de gonflement des boules des gadgets U pour $\rho = 37$ sont orthogonaux à ceux des boules de branche.

Lm Les vecteurs de gonflement de deux boules de gadgets U distincts pour $\rho = 37$ sont orthogonaux.

$\delta - 1$ dimensions nécessaires pour gonfler à $\rho = 37$

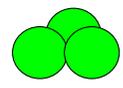
$\delta - 2$ gadgets U



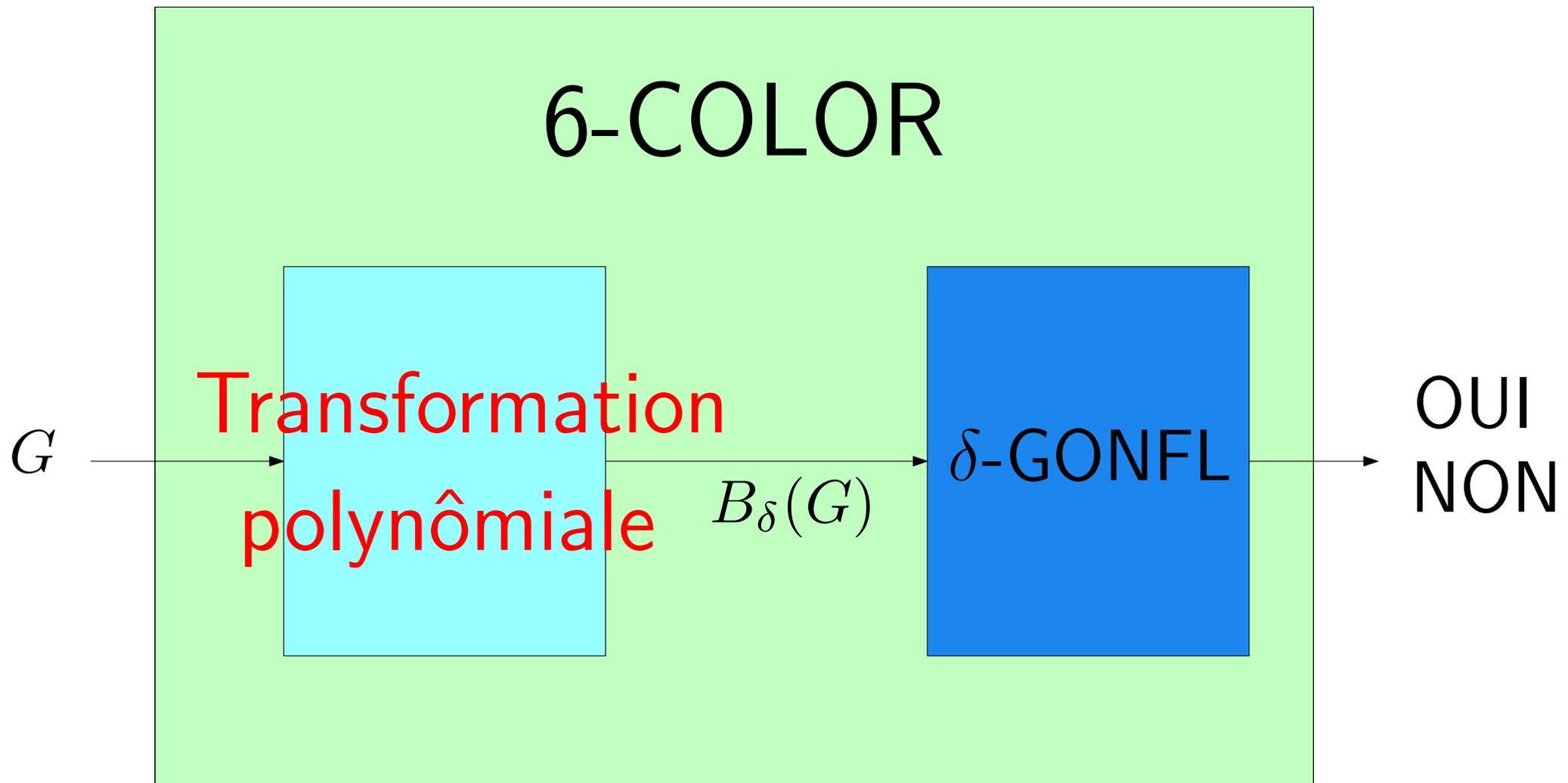
Imposer $\rho = 37$



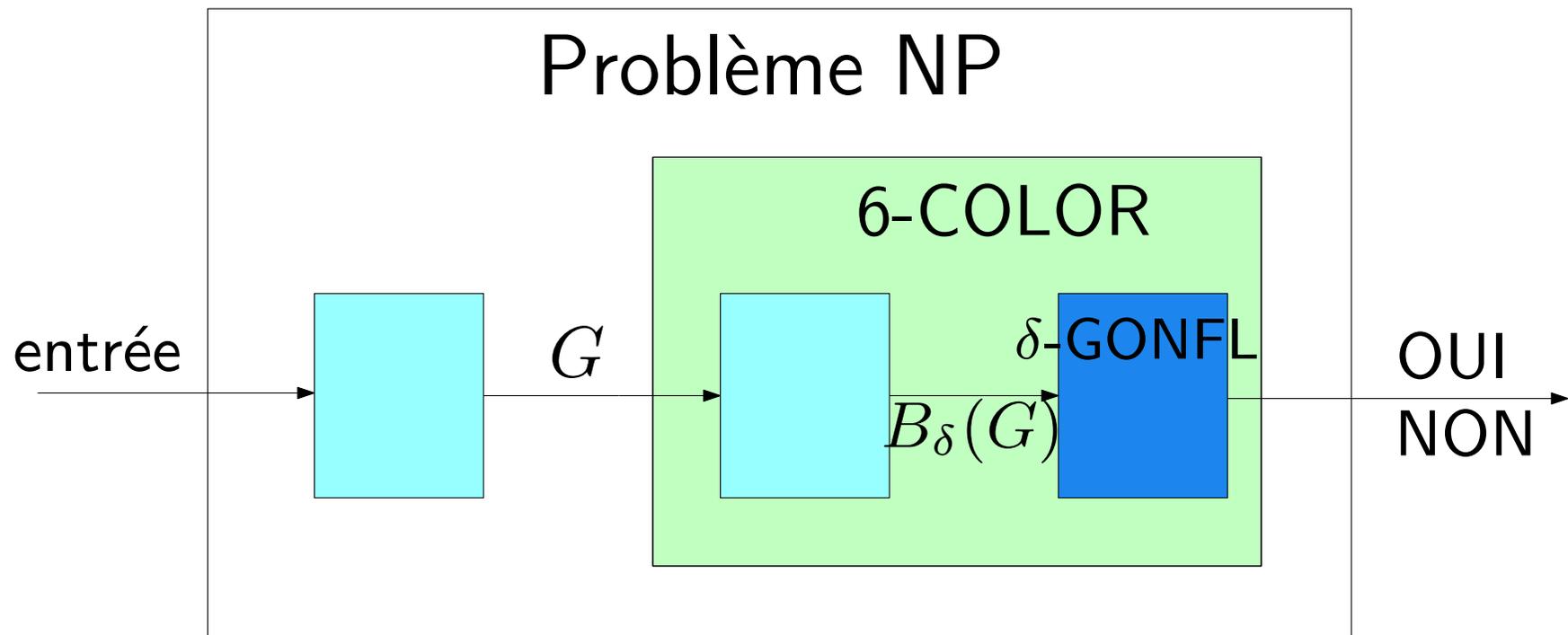
trois boules de rayon 37
tangentes deux à deux



de coordonnées
 $(0, 0, 0)$
 $(74, 0, 0)$
 $(37, 37\sqrt{3}, 0)$

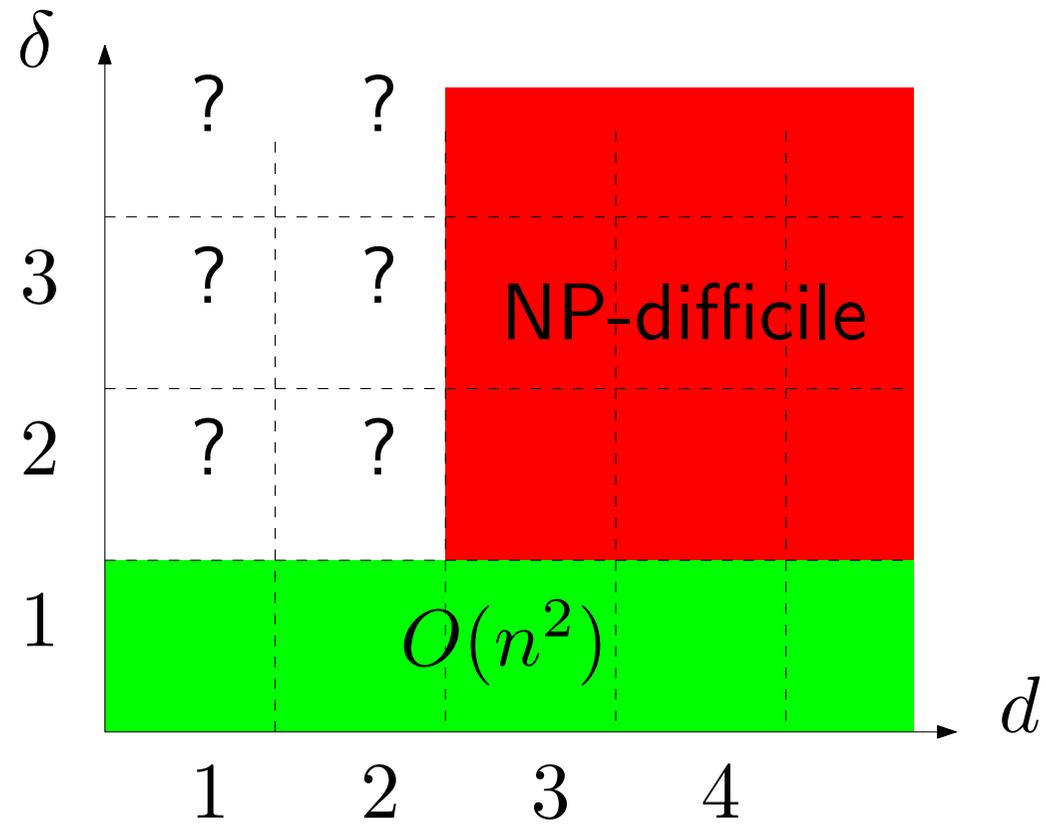


Thm G est 6-coloriable ssi $B_\delta(G)$ est δ -gonflable.

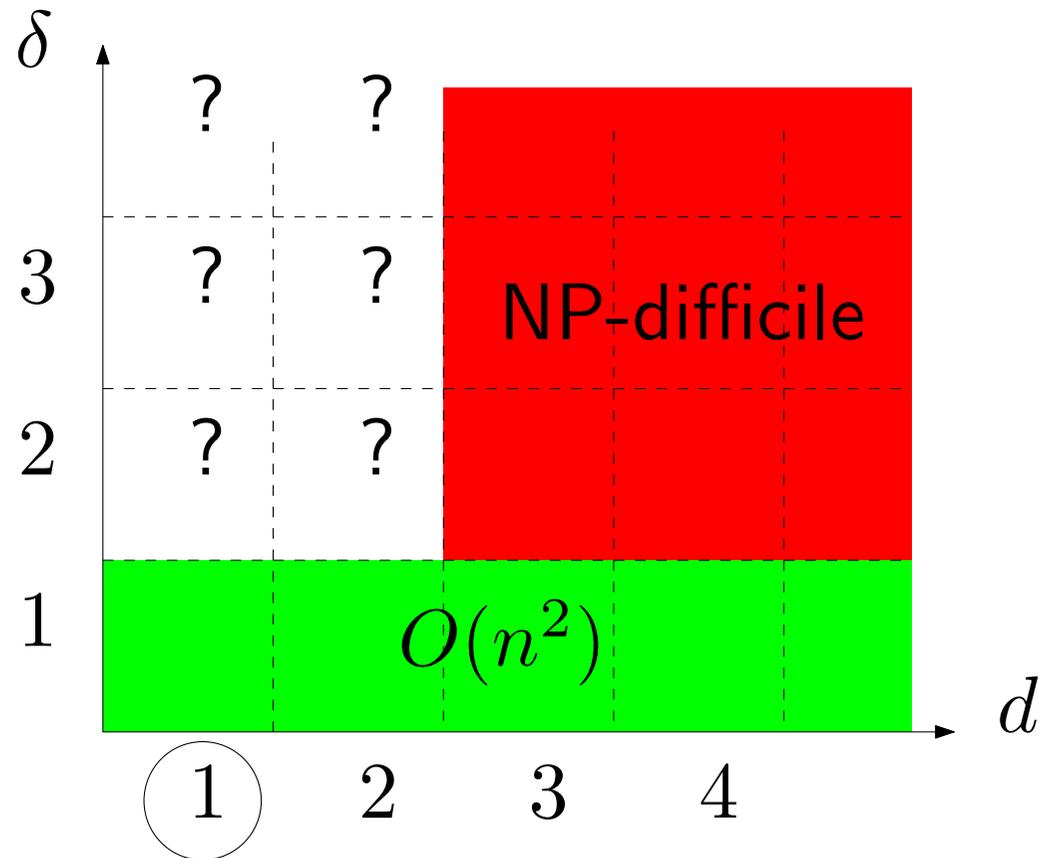


Thm Pour $\delta \geq 2$ et $d \geq 3$, décider si une collection de boules de \mathbb{R}^d , de rayons et coordonnées algébriques, possède un gonflement de dimension δ est NP-difficile.

BILAN

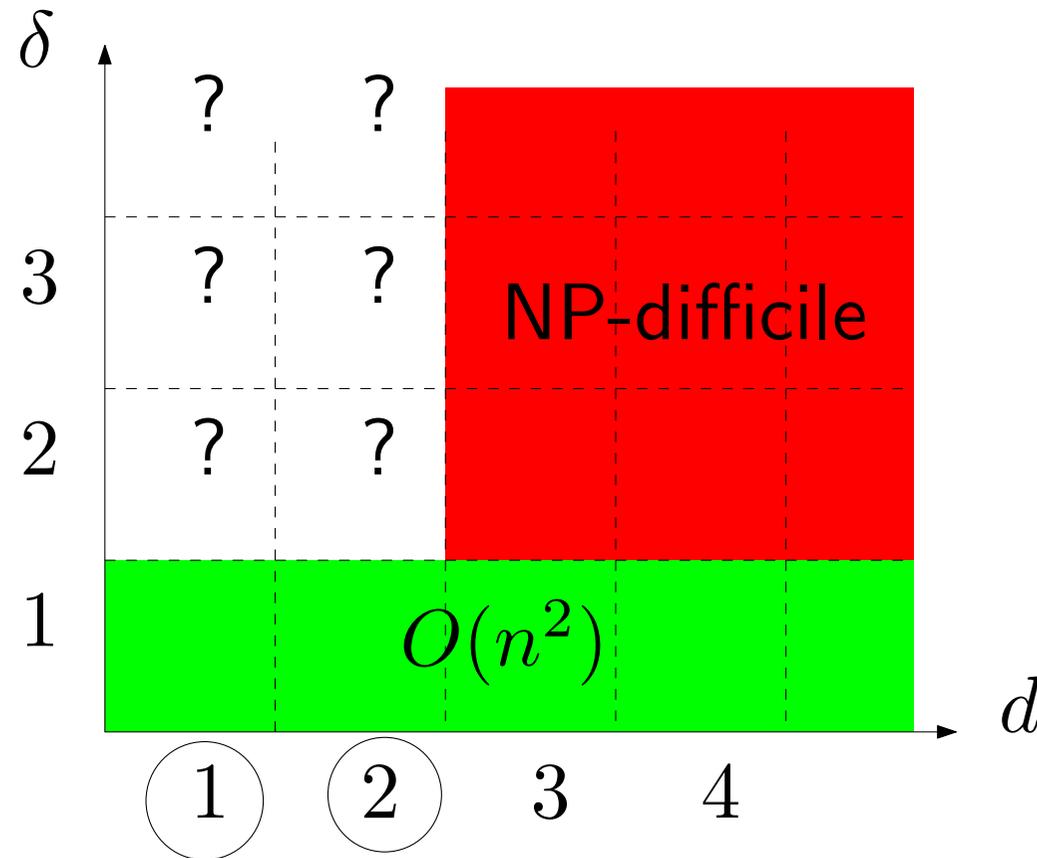


BILAN



ordre sur les boules

BILAN



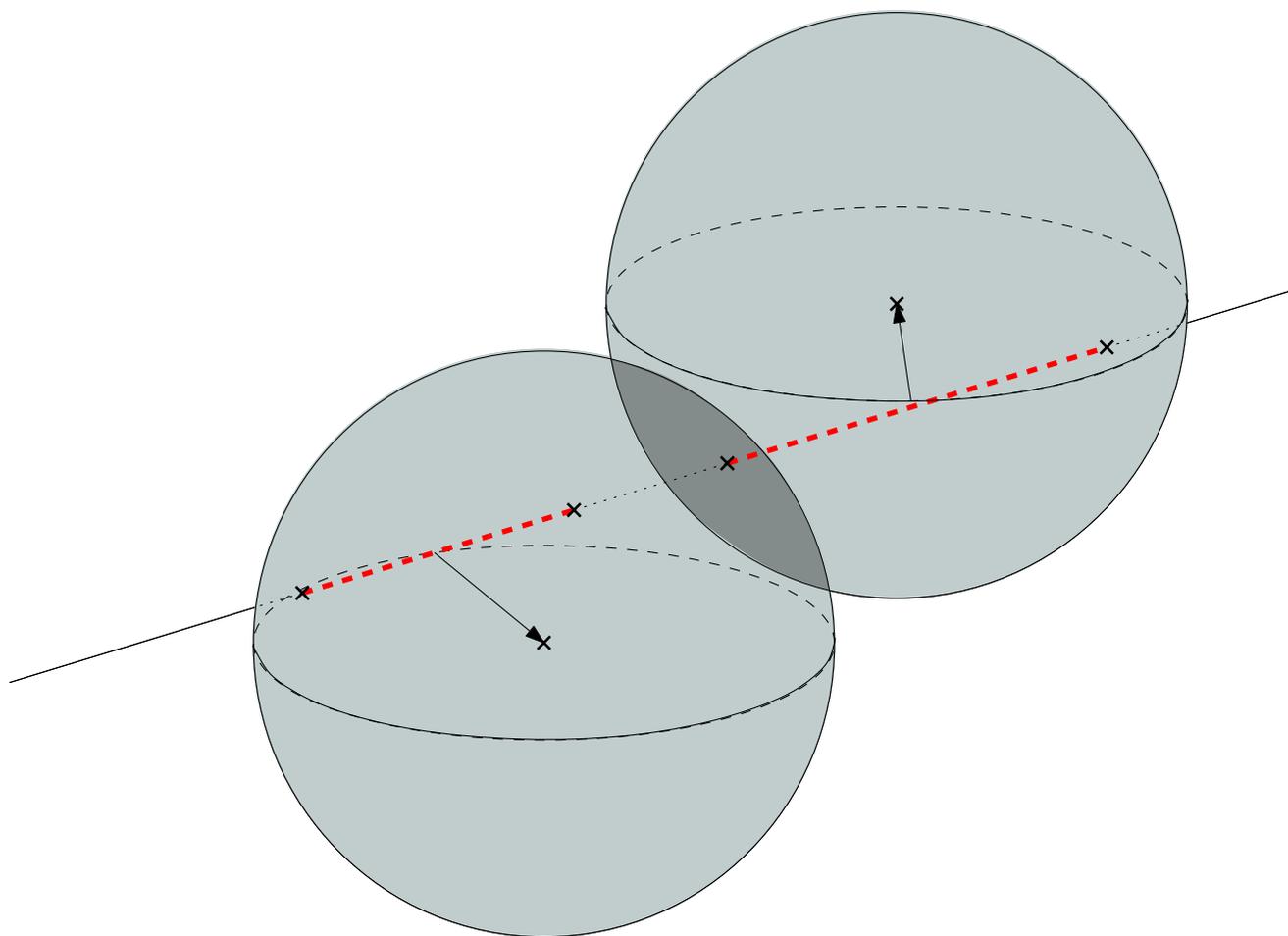
ordre sur les boules

réaliser $B_2(G)$ dans le plan?

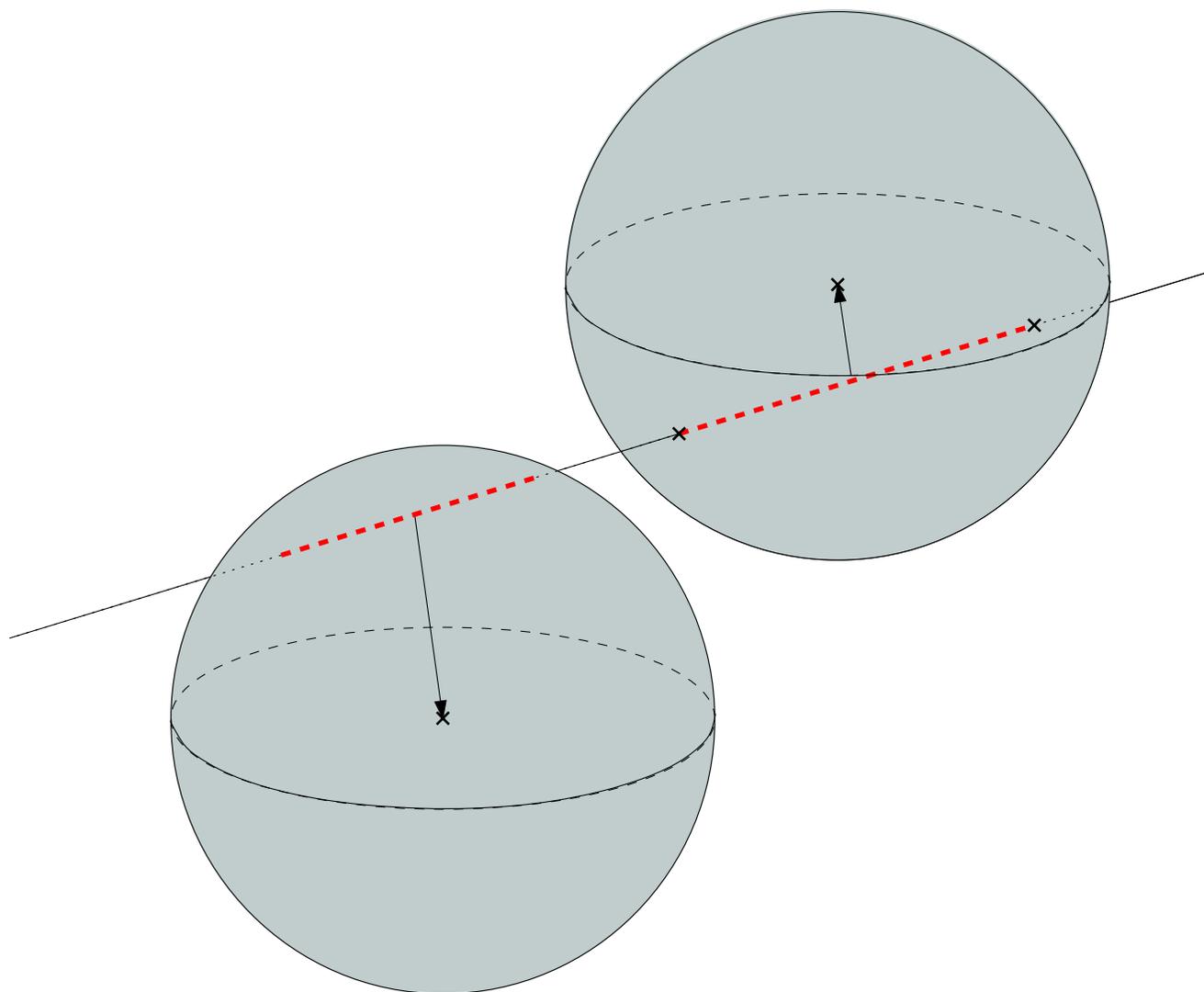
Merci

Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.

Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.

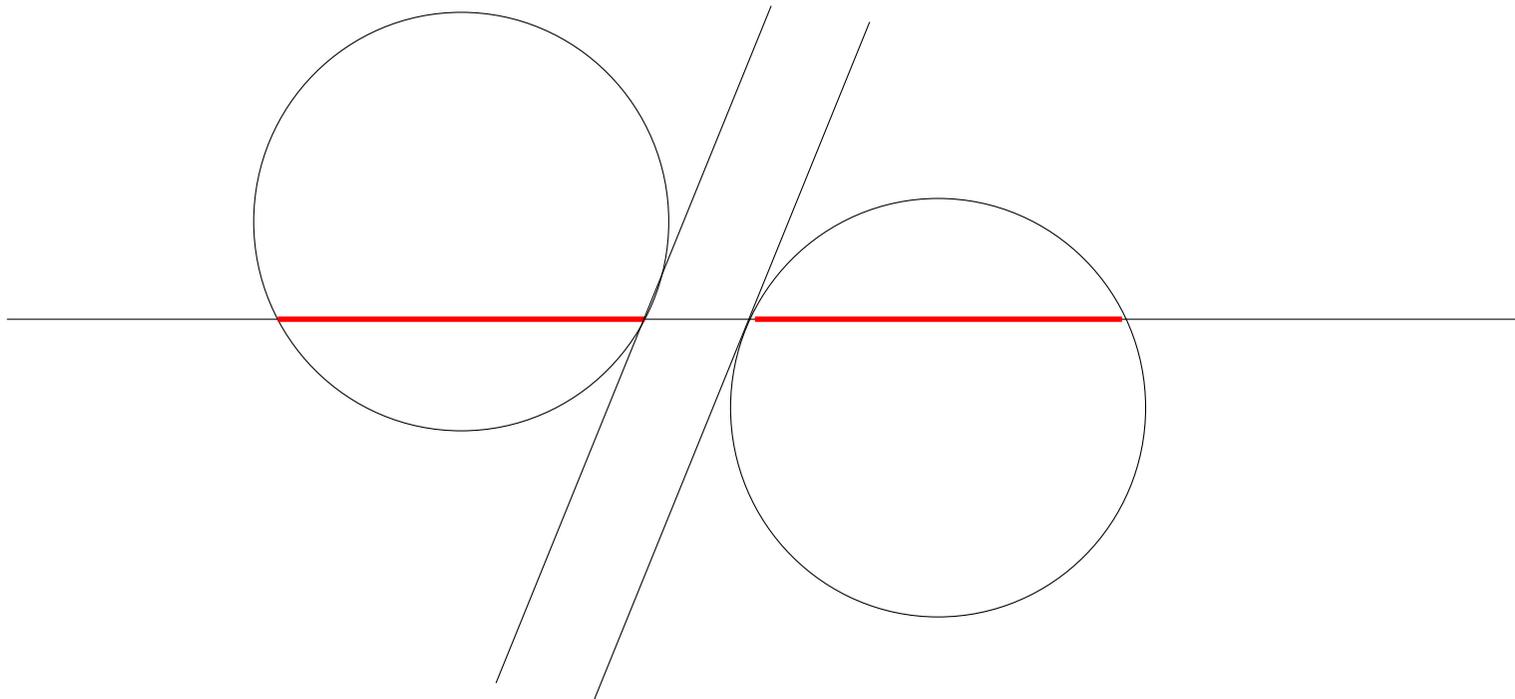


Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.



Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.

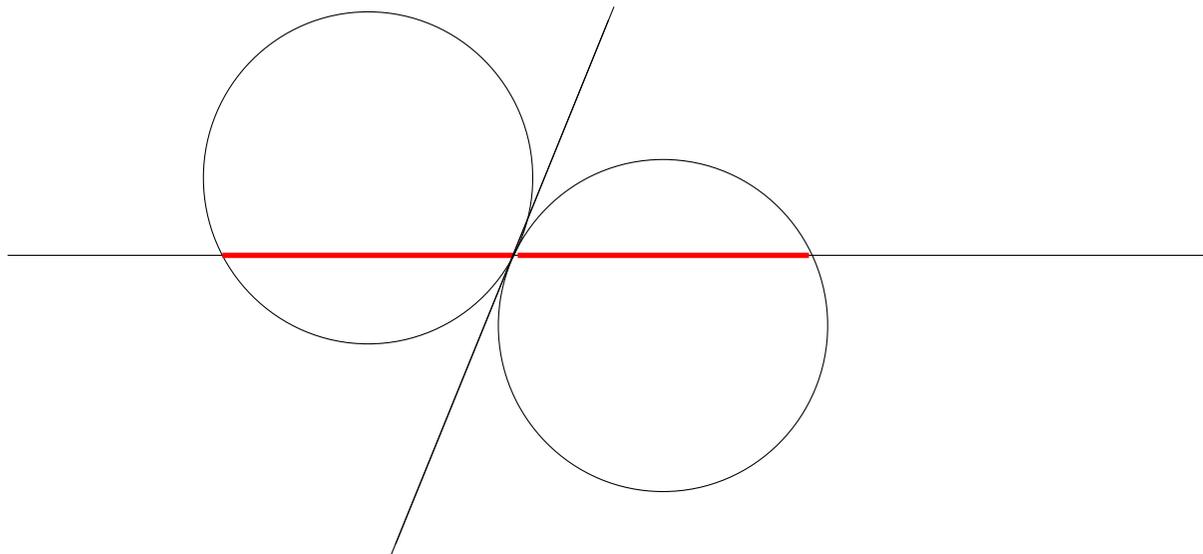
Lm Deux boules de même rayon r sont gonflables pour tout $\rho \geq r$.

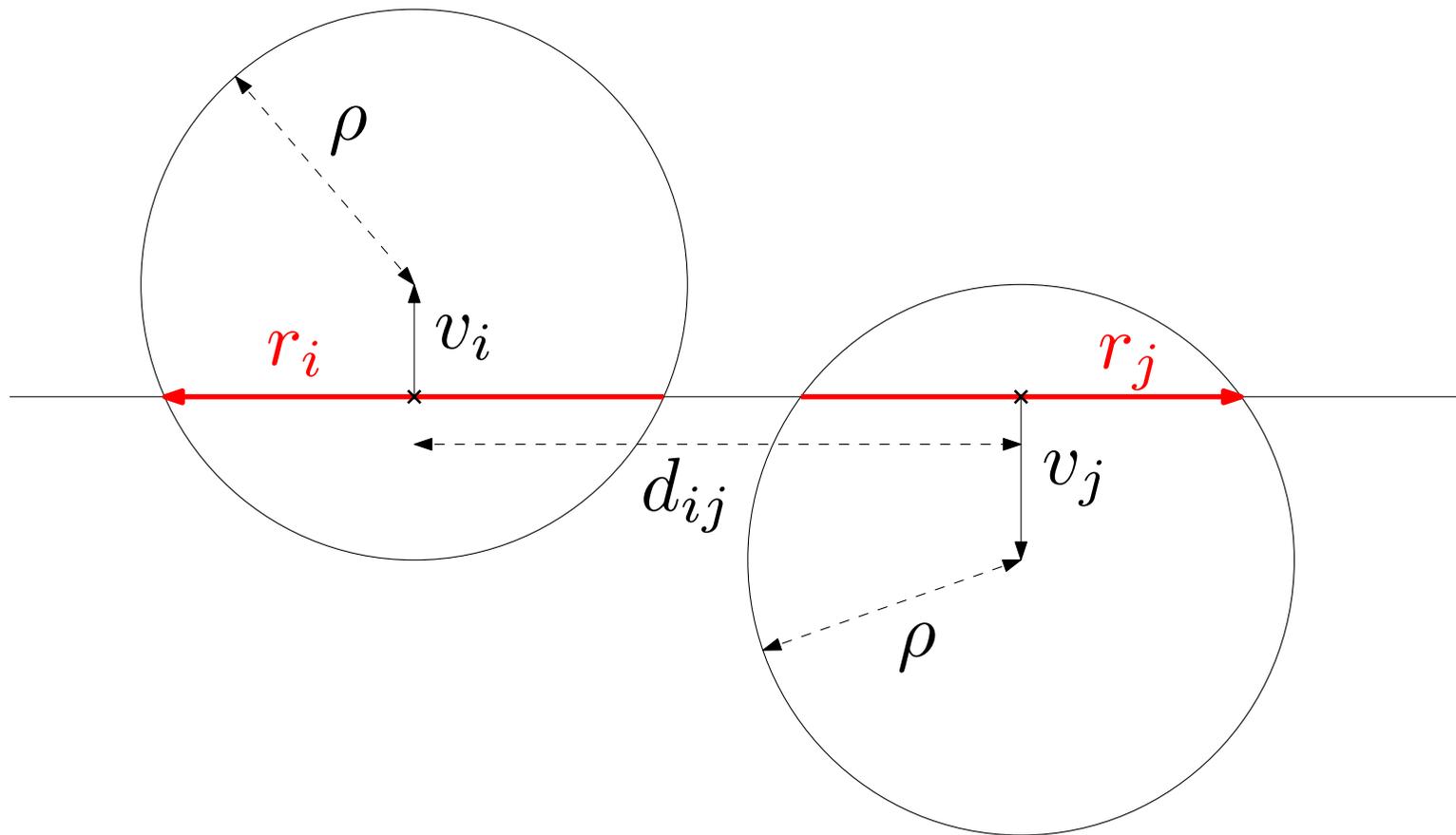


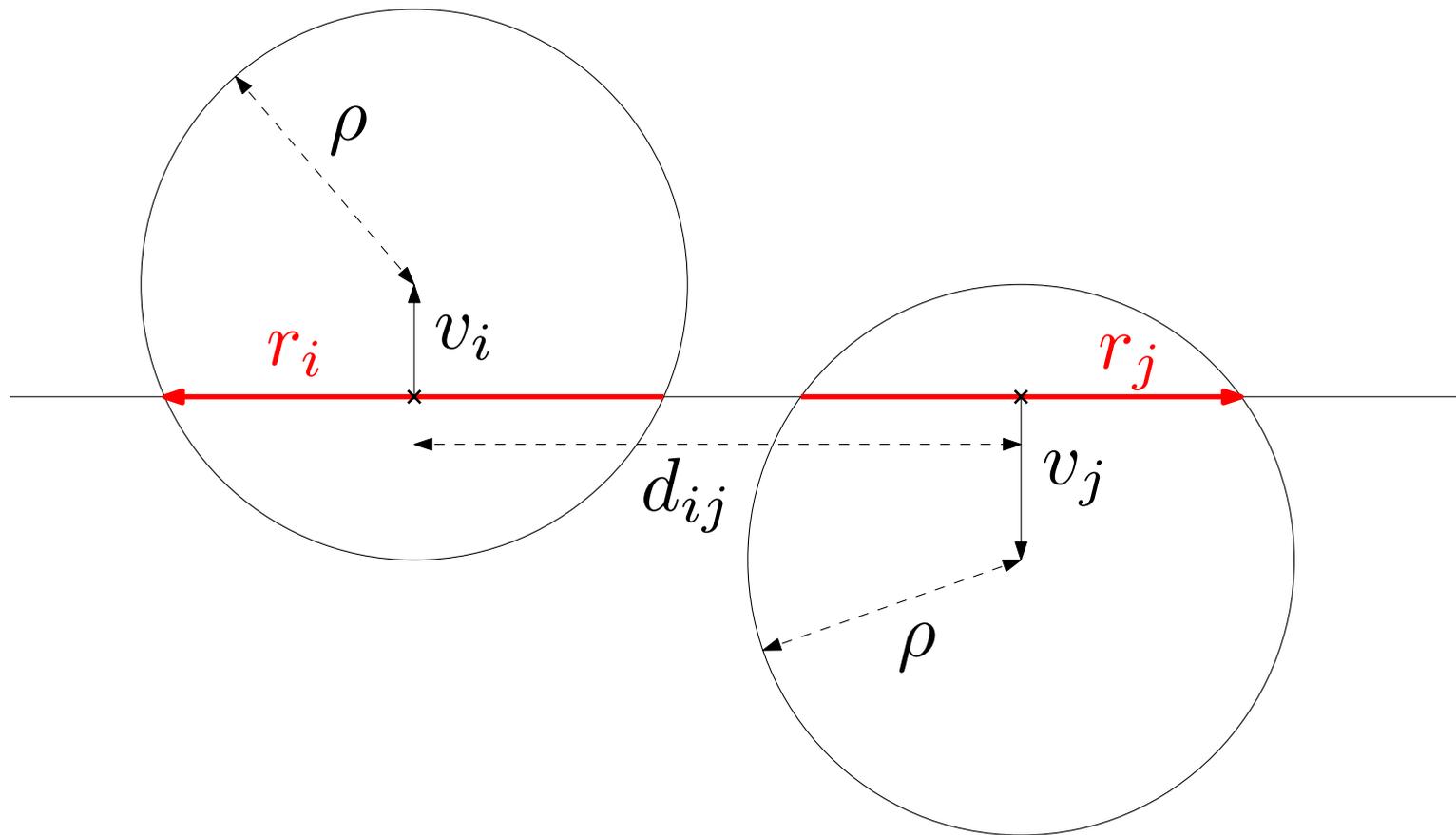
Lm Deux boules gonflables sont gonflables avec des vecteurs opposés.

Lm Deux boules de même rayon r sont gonflables pour tout $\rho \geq r$.

Lm Deux boules tangentes sont gonflables ssi elles ont même rayon.







$$d_{ij}^2 + \|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - 2v_i \cdot v_j \geq 4\rho^2$$

$$v_i = \sqrt{\rho^2 - r_i^2} \vec{x}_i \quad \text{avec} \quad \vec{x}_i \in \mathbb{S}^{\delta-1}$$