

Rapport sur les travaux antérieurs

Concours CR CNRS 06/02 2024

Guillaume Aubian

Thématiques de recherche	1
Lien entre le nombre dichromatique et diverses métriques	3
Structure des graphes dirigés de grand nombre dichromatique	5
Cliquicité des tournois	7
Flots et polynômes	8
Une approche computationnelle	9
Liste des articles acceptés	9
Liste des articles soumis pour publication	9

Mes travaux s'intéressent à la combinatoire et aux mathématiques discrètes. En particulier, les graphes, mais surtout leur pendant dirigé, sont au centre de mes recherches. Dans ces domaines, ce sont les questions de structure et de coloration qui ont attiré mon attention. J'ai aussi une affinité avec les questions algorithmiques.

Thématiques de recherche

Organisation du document

Ce document contient quatre parties principales, correspondant à mes thématiques de recherche :

- la première traite du lien entre le nombre dichromatique et différentes métriques sur les graphes dirigés, et correspond à des travaux principalement effectués au début de mon doctorat;
- la deuxième étudie la structure des orientations de graphes de grand nombre dichromatique, et correspond au cœur de mon doctorat;
- la troisième partie s'intéresse à une notion de cliquicité adaptée aux tournois : ce travail toujours en cours, a été effectué après ma soutenance de thèse;
- la partie finale concerne quand à elle les flots dans les graphes dirigés, et leur lien avec certains polynômes, notamment dans le cas de graphes dirigés planaires : il s'agit de travaux en cours durant mon post-doctorat à l'université Charles.

Ces quatre parties, indépendantes, s'articulent ensemble autour de la compréhension des graphes dirigés. Pour les motiver, il convient néanmoins d'introduire quelques concepts.

Quelques concepts transverses

En 1852, Francis Guthrie découvrit que quatre couleurs suffisaient à colorier la carte des comtés anglais de sorte à ce que deux comtés adjacents aient toujours des couleurs distinctes. Construisons un graphe G en créant un sommet par comté et une arête pour chaque paire de comtés adjacents. Colorier notre carte, c'est associer une couleur à chaque sommet de G de sorte que deux sommets voisins aient toujours des couleurs distinctes : on définit ainsi la coloration de graphes, et on appelle nombre chromatique le nombre minimum de couleurs nécessaires. On peut alors énoncer la conjecture des quatre couleurs, devenue théorème cent ans plus tard :

Théorème 1 (*Théorème des quatre couleurs (Appel, Hanken, 1977 [AH77])*)

Tout graphe planaire a un nombre chromatique d'au plus 4.

Depuis, la coloration de graphes a connu de nombreuses applications : de l'assignation de registres en compilation [CAC⁺81] à l'allocation de fréquences WLAN [RPM05] en passant par la conception de puces électroniques [LTN18]. Mieux comprendre la coloration de graphes est donc un enjeu crucial !

Une autre notion centrale en théorie des graphes est celle de cliquicité¹, qui est le nombre maximum de sommets deux-à-deux adjacents, avec notamment des applications en chimie [RWC⁺03], en génération automatique de tests [HP98], en assignation de canaux [GM01] et en bioinformatique [DS86].

Les graphes sont souvent utilisés en tant qu'outils de modélisation mais parfois il est plus intéressant de considérer des graphes dirigés² : par exemple, un réseau de neurones ou un réseau routier seront plus fidèlement modélisés par des graphes dirigés. Mais quelle est la bonne notion de coloration pour les graphes dirigés ? En 1982, Victor Neumann-Lara proposa la définition suivante :

Définition 2 (*Neumann-Lara, 1982 [NL82]*)

Une coloration d'un graphe dirigé est une fonction associant une couleur à chaque sommet de sorte à ce qu'il n'y ait pas de cycle dirigé monochromatique. Le nombre dichromatique d'un graphe dirigé est le nombre minimum de couleurs nécessaires.

Cette notion, qui généralise la notion non orientée³, fut étudiée au début des années 80, notamment par Paul Erdős, puis réintroduite par Bojan Mohar en 2003 et depuis un effort collectif a été fourni par la communauté pour étudier comment traduire des résultats du monde non orienté dans le monde dirigé. De tels résultats ont été trouvés pour différents domaines de la théorie des graphes, comme la théorie des graphes extrémaux [HiK15, BJBSS20, KS20], la théorie algébrique des graphes [Moh10], le nombre liste-chromatique [HM11, BHL18], la coloration des graphes orientés sur des surfaces [LM16, Ste19, AHKR21] etc. La notion a aussi des applications plus pratiques,

¹En anglais, *clique number*.

²Dans la littérature, on parlera de *digraphe*, ou *digraph* en anglais.

³Il y a une bijection entre les colorations d'un graphe et les colorations du graphe dirigé obtenu en remplaçant chaque arête par une paire d'arcs opposés.

notamment en communication sur des canaux bruités [ST14] ou dans l'assignation de canaux radios [McD03].

Lien entre le nombre dichromatique et diverses métriques

Comme le calcul du nombre dichromatique est NP-complet, il est intéressant de chercher des bornes faciles à calculer sur celui-ci. C'est par exemple l'objectif d'un des résultats fondamentaux en coloration de graphes, le théorème de Brooks :

Théorème 3 (Brooks, 1941 [Bro41])

Le nombre chromatique d'un graphe vaut au plus le degré maximum des sommets de ce graphe plus un. De plus, il n'y a égalité que si une composante de ce graphe est un cycle impair ou un graphe complet. Voir Figure 1.

où le degré d'un sommet est son nombre de voisins.

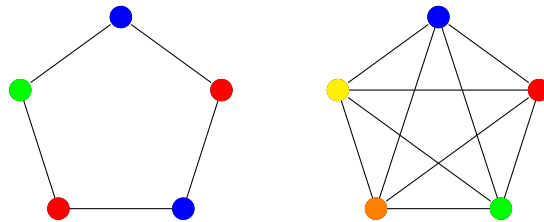


Figure 1: Le cycle impair a nombre chromatique 3, ses sommets ont degré 2, le graphe complet a nombre chromatique 5, ses sommets ont degré 4.

Chercher un résultat similaire sur les graphes dirigés requiert d'abord de choisir la bonne notion de degré. Harutyunyan et Mohar ont démontré [HM11] une borne similaire et caractérisé les cas où il y a égalité, en définissant le degré d'un sommet comme le maximum entre son nombre de sommets entrants et de sommets sortants, cf Figure 2. Avec Pierre Aboulker, nous avons obtenu plusieurs preuves alternatives de ce théorème, dont certaines permettent d'affiner la structure des colorations ainsi obtenues.

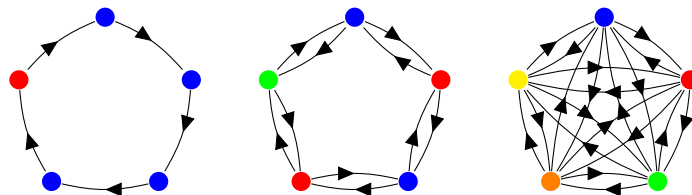


Figure 2: Les cas limites du théorème de Harutyunyan-Mohar.

Nous avons aussi prouvé qu'on obtenait la même borne en définissant le degré d'un sommet comme le minimum entre son degré entrant et son degré sortant. Néanmoins,

nous avons montré que décider si le nombre dichromatique est égal à un plus cette métrique est NP-complet et donc une caractérisation simple des cas limites semble impossible.

Le théorème de Brooks est central dans le domaine de la coloration de graphes, et il a donné lieu à de nombreuses généralisations utilisant diverses notions de coloration ou des métriques plus fortes que le degré. Un tel exemple de métrique est l'arête-connectivité locale maximale, définie comme le nombre maximum de chemins arêtes-disjoints entre deux sommets distincts. Il peut être prouvé que le nombre chromatique d'un graphe est au plus égal à son arête-connectivité locale maximale plus un. Cette borne est une amélioration par rapport à la borne sur le degré, et il reste à caractériser les cas extrémaux. Cela a été fait par Stiebitz et Toft [ST16] et par Aboulker, Brettell, Havet, Marx et Trotignon [ABH⁺17]. Dans le cas des hypergraphes, un résultat similaire a été trouvé par Schweser, Stiebitz et Toft [SST22].

Avec Pierre Aboulker et Pierre Charbit, nous avons prouvé un résultat similaire sur les graphes dirigés [AAC23] :

Théorème 4

Soit $k \geq 3$. Les graphes dirigés d'arc-connectivité locale maximale au plus k ont nombre dichromatique au plus $k+1$. On a une caractérisation récursive des cas où k couleurs suffisent.

La caractérisation exacte est fastidieuse mais nous avons trouvé un algorithme polynomial pour caractériser ces cas extrémaux. La Figure 3 montre un exemple de cas extrême.

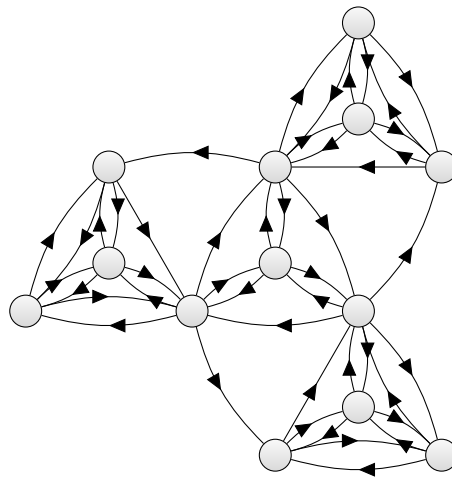


Figure 3: Un cas typique de graphe dirigé avec arc-connectivité locale maximale 3 et nombre dichromatique 4.

Structure des graphes dirigés de grand nombre dichromatique

À quoi peut ressembler un graphe de grand nombre chromatique ? Une première approche est de caractériser les structures locales ainsi forcées : quels graphes apparaissent forcément dans un graphe de grand nombre chromatique ? Historiquement, on s'intéresse plutôt à la contraposée : quels ensembles finis⁴ S sont tels que les graphes ne contenant aucun graphe de S comme sous-graphe ont un nombre chromatique borné ?

Il est facile de montrer qu'un tel ensemble S contient forcément un graphe complet, et Erdős prouva [Erd59] que S doit aussi contenir une forêt. Gyárfás et Sumner ont alors conjecturé qu'une forêt et un graphe complet suffisent :

Conjecture 5 (Gyárfás, 1975 & Sumner, 1981)

Pour tout graphe complet K et forêt F , il existe une constante $c_{K,F}$ telle que les graphes sans F ni K ont nombre chromatique au plus $c_{K,F}$.

Cette conjecture fondamentale reste largement ouverte.

Comment l'adapter au monde dirigé ? Un premier résultat fut obtenu par Berger, Choromanski, Chudnovsky, Fox, Loeb, Scott, Seymour et Thomassé [BCC⁺13] pour les tournois⁵. Ils réussirent à caractériser récursivement les héros, c'est-à-dire les tournois qui apparaissent dans tout tournoi de nombre dichromatique suffisamment grand. Pour les graphes dirigés en général, Aboulker, Charbit et Naserasr [ACN21] sont arrivés, via des arguments similaires au cas non orienté, aux conjectures 6 et 7. Le cœur de mon travail de thèse a été d'étudier ces deux conjectures.

Conjecture 6 (Aboulker, Charbit, Naserasr, 2021 [ACN21])

Soit H un héros et F une orientation de forêt d'étoiles. Il existe une constante $c_{H,F}$ telle que les orientations de graphes ne contenant ni H ni F ont nombre dichromatique au plus $c_{H,F}$.

En pratique, interdire un héros et une forêt d'étoiles orientée revient à s'intéresser à des classes de graphes dirigés assez naturelles. Par exemple, le premier cas auquel je me suis attaqué est celui dans lequel les deux graphes dirigés de la Figure 4 sont interdits : cela revient à étudier les graphes dirigés tels que le voisinage sortant de tout sommet est un tournoi transitif. À l'aide d'arguments géométriques, nous avons prouvé [AAC22a] que de tels graphes dirigés ont un nombre dichromatique d'au plus 2, vérifiant donc la conjecture pour ce cas.

⁴Si on se restreint ici au cas fini, il existe tout de même une littérature fournie dans le cas où S est infini, cf le survey [SS20] de Scott et Seymour.

⁵Un tournoi est une orientation d'un graphe complet.

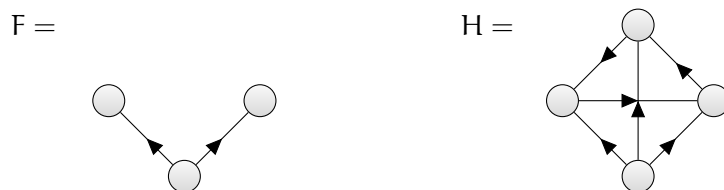


Figure 4: Les graphes dirigés sans F ni H ont nombre dichromatique au plus 2.

Après avoir résolu d'autres cas de la conjecture, nous avons prouvé, avec mes directeurs de thèse, que la Conjecture 6 était fautive : par exemple, les graphes dirigés F et H de la Figure 5 forment un contre-exemple. Pour ce faire, nous avons tissé des liens entre la coloration de graphes dirigés et la coloration de graphes ordonnés. Dans le même article, nous avons aussi caractérisé les héros qui fonctionnent avec ce choix de F (ce qui revient à étudier les cas des orientations de graphes multipartis complets). Récemment, Carbonero, Koerts, Moore et Spirkl ont modifié nos constructions pour exhiber d'autres contre-exemples à cette conjecture [CHMS22].

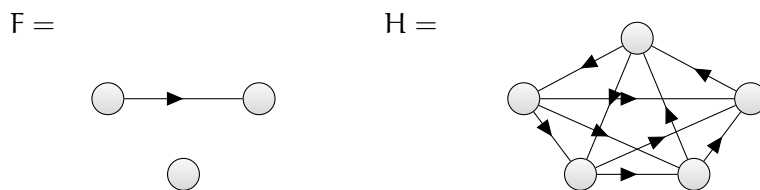


Figure 5: F et H forment un contre-exemple à la Conjecture .

Conjecture 7 (Aboulker, Charbit, Naserasr, 2021 [ACN21])

Soit F une orientation de forêt et k un entier. Il existe une constante $c_{k,F}$ telle que, pour tout graphe G avec cliquicité au plus k , les orientations de G ne contenant pas F ont nombre dichromatique au plus $c_{k,F}$.

Cette conjecture a été démontrée quand F est une orientation d'un chemin de longueur 4 par Cook, Masařík, Pilipczuk, Reinald et Souza [CMP⁺22]. Avec Aboulker, Charbit et Thomassé, nous avons réussi à prouver les cas où $k = 3$ et F est un chemin orienté de longueur 5 ou 6, en utilisant une méthode basée sur les ensembles dipolaires.

On peut aussi s'intéresser au nombre dichromatique des graphes dirigés avec des contraintes globales et non locales : avec Pierre Aboulker et Rafael Steiner [AAS22], nous nous sommes ainsi intéressés au nombre dichromatique des orientations de graphes cordaux (les graphes dont tous les cycles à au moins 4 sommets contiennent une corde).

Cliquicité des tournois

Certaines des conjectures les plus importantes des graphes non orientés peuvent être reformulées comme des problèmes sur les graphes dirigés, mais surtout sur les tournois : c'est le cas par exemple de la conjecture de Erdős-Hajnal ou de Erdős-El Zahar. C'est ici une des opportunités de l'étude des tournois : il y a de nombreux ponts entre les graphes et les tournois, mais la littérature sur les graphes est très fournie alors que celle sur les tournois est encore lacunaire.

La cliquicité étant une métrique essentielle en théorie des graphes, une question s'impose : comment l'adapter au monde dirigé ? La définition suivante semble préserver les propriétés essentielles de la cliquicité⁶ :

Définition 8 (Aboulker, Aubian, Charbit, Lopes, 2023 [AACL23])

Étant donné un ordre total \prec sur ses sommets, le graphe retour d'un graphe dirigé est le graphe de même ensemble de sommets et avec une arête uv pour chaque arc $u \rightarrow v$ tel que $v \prec u$. La cliquicité d'un graphe dirigé est la plus petite cliquicité d'un de ses graphes retour.

Elle est principalement motivée par analogie avec le fait que le nombre dichromatique d'un graphe dirigé est le plus petit nombre chromatique d'un de ses graphes retour.

À partir de cette définition, nous avons, avec Aboulker, Charbit et Lopes [AACL23], approfondi la notion, prouvé des résultats de $\vec{\chi}$ -bornitude, et établi la conjecture suivante, qui peut être vu comme un nouvel analogue de la conjecture de Gyárfás-Sumner, mais pour les tournois :

Conjecture 9 (Aboulker, Aubian, Charbit, 2023 [AACL23])

Pour tout entier k et tout tournoi T dont un graphe retour est une forêt, il existe une constante $c_{k,T}$ telle que tout tournoi de cliquicité au plus k ne contenant pas de copie de T a nombre dichromatique au plus $c_{k,T}$.

Comme cette définition n'est pas locale mais globale, elle est plus difficile à manipuler, même en se restreignant aux tournois. Ainsi, dans [NSS23], Tung Nguyen, Alex Scott et Paul Seymour se sont demandés quelle était la complexité temporelle du calcul de la cliquicité d'un tournoi. Dans [Aub24], j'ai répondu à cette question en prouvant que le problème était NP-complet. Pour ce faire, j'ai utilisé une construction qui, une fois modifiée, m'a aussi permis de contredire la Conjecture 9.

Comme le montre la Conjecture 9, les tournois qui admettent un graphe retour qui est une forêt sont essentiels. Avec Pierre Aboulker et Raoul Lopez [AAL24], nous nous sommes intéressés à la structure de tels tournois, prouvant notamment que les reconnaître est NP-complet.

⁶Notamment, le fait qu'il doit toujours être inférieur au nombre dichromatique, ce que ne vérifient pas la plupart des définitions plus « naturelles ».

Flots et polynômes

La conjecture la plus célèbre sur le nombre dichromatique est la conjecture de Neumann-Lara, qui est la version dirigée du théorème des quatre couleurs.

Conjecture 10 (Neumann-Lara, 1982)

Les orientations de graphes planaires ont nombre dichromatique au plus 2.

Pendant longtemps, la conjecture des quatre couleurs a motivé une part conséquente de la recherche en théorie des graphes, et de nombreux outils ont été développés dans le but de la résoudre. Ces outils ont naturellement été traduits dans le monde des graphes dirigés. Parmi ceux-ci, les NL- k -flots, développés par Winfried Hochstättler dans [Hoc17], sont parmi les plus prometteurs : un NL- k -flot est une fonction qui associe à chaque arc d'un graphe dirigé un élément de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et telle que la somme des poids des arcs entrant dans un sommet est égale à la somme des poids des arcs sortants de ce sommet. La conjecture de Neumann-Lara est équivalente au fait que toute orientation d'un graphe planaire admet un NL-2-flot. Barbara Altenbokum, Winfried Hochstättler et Johanna Wiehe ont démontré dans [AHW21] que pour tout graphe dirigé D , il existe un polynôme P , nommé le polynôme NL-flot, tel que pour tout k , D admet $P(k)$ NL- k -flots. Donc, la Conjecture 10 équivaut au fait que pour toute orientation de graphe planaire, le polynôme NL-flot P correspondant satisfait $P(1) > 0$.

Durant mon post-doctorat à l'université Charles dans l'équipe de Zdeněk Dvořák, je me suis intéressé aux NL- k -flots, notamment d'un point de vue algorithmique, par exemple aux questions de savoir s'il y a des points en lesquels approximer le polynôme NL-flot est polynomial, ou des classes de graphes dirigés sur lesquelles on peut calculer efficacement le polynôme NL-flot.

Dans le monde des graphes non orientés, il existe un polynôme multivarié qui généralise ce polynôme : le polynôme de Tutte. Ce polynôme a été adapté aux graphes dirigés par Awan et Bernardi [AB23], en étudiant la fonction qui à k impair associe la somme, pour tous les NL- k -flots, de $x^{\text{nombre de poids dans } \{1, \dots, \frac{k-1}{2}\}} y^{\text{nombre de poids dans } \{-\frac{k-1}{2}, \dots, -1\}}$. Ils ont démontré que cette fonction est un polynôme, ainsi que de nombreuses propriétés analogues au polynôme de Tutte. Avec Andrew Goodall, nous nous sommes intéressés à cet invariant dans lequel, au lieu de partitionner $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ en $\{1, \dots, \frac{k-1}{2}\}$ et $\{-\frac{k-1}{2}, \dots, -1\}$, nous partitionnions plutôt les poids selon s'ils correspondent ou non à des résidus quadratiques modulo k . Dans un article en cours d'écriture, nous étudions notamment à quelles conditions cet invariant se trouve être un polynôme, et prouvons dans ces cas des résultats similaires à ceux de Awan et Bernardi.

Une approche computationnelle

Ayant participé à (et organisé) de nombreuses compétitions de programmation⁷ et été Software Engineer chez Google durant un an et demi, j'ai une appétence pour le fait d'utiliser des programmes dans mes recherches. L'article « Computing the clique number of tournaments » [Aub24] est un exemple dans lequel je me suis beaucoup appuyé sur ce genre de pratiques. Dans l'article « Problems, proofs, and disproofs on the inversion number » [AHH⁺22], avec Frédéric Havet, Florian Hörsch, Felix Klingelhofer, Nicolas Nisse, Clément Rambaud et Quentin Vermande, j'ai aussi utilisé une telle approche, cette fois-ci pour trouver un contre-exemple à une conjecture de Bang-Jensen, Ferreira da Silva et Havet sur le nombre d'inversions des tournois. De manière générale, la plupart des résultats énoncés dans ce rapport ont été inspirés par des tests à l'ordinateur.

Liste des articles acceptés

- *Vizing's and Shannon's Theorems for defective edge colouring*, avec Pierre Aboulker et Chien-Chung Huang, publié dans *Electronic Journal of Combinatorics* [AAH22];
- *Heroes in orientations of chordal graphs*, avec Pierre Aboulker et Raphael Steiner, publié dans *SIAM Journal of Discrete Mathematics* [AAS22];
- *Heroes in oriented complete multipartite graphs*, avec Pierre Aboulker et Pierre Charbit, accepté dans *Journal of Graph Theory* [AAC22b];
- *Decomposing and colouring some locally semicomplete digraphs*, avec Pierre Aboulker et Pierre Charbit, publié dans *European Journal of Combinatorics* [AAC22a];
- *Four proofs of the directed Brooks' theorem*, avec Pierre Aboulker, publié dans *Discrete Mathematics* [AA22].

Liste des articles soumis pour publication

- *Finding forest orderings of tournaments is NP-complete*, avec Pierre Aboulker et Raul Lopes [AAL24];
- *Computing the clique number of tournaments* [Aub24];
- *Clique number of tournaments*, avec Pierre Aboulker, Pierre Charbit et Raul Lopes [AACL23];
- *Digraph Colouring and Arc-Connectivity*, avec Pierre Aboulker et Pierre Charbit [AAC23];
- *Problems, proofs, and disproofs on the inversion number*, avec Frédéric Havet, Florian Hörsch, Félix Klingelhofer, Nicolas Nisse, Clément Rambaud et Quentin Vermande [AHH⁺22];
- *(P₆, triangle)-free digraphs have bounded dichromatic number*, avec Pierre Aboulker, Pierre Charbit et Stéphan Thomassé [AACT22].

⁷Je suis aujourd'hui un des membres du jury et responsables des problèmes du SWERC ICPC, le championnat d'Europe universitaire.

Références

- [AA22] Pierre Aboulker and Guillaume Aubian. Four proofs of the directed Brooks' theorem. *Discrete Mathematics*, page 113193, 2022.
- [AAC22a] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Pierre Charbit. Decomposing and colouring some locally semicomplete digraphs. *Eur. J. Comb.*, 106:103591, 2022.
- [AAC22b] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Pierre Charbit. Heroes in oriented complete multipartite graphs, 2022.
- [AAC23] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Pierre Charbit. Digraph colouring and arc-connectivity, 2023.
- [AACL23] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, Pierre Charbit, and Raul Lopes. Clique number of tournaments, 2023.
- [AACT22] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, Pierre Charbit, and Stéphan Thomassé. (p_6 , triangle)-free digraphs have bounded dichromatic number, 2022.
- [AAH22] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Chien-Chung Huang. Vizing's and Shannon's theorems for defective edge colouring. *Electron. J. Comb.*, 2022.
- [AAL24] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Raul Lopes. Finding forest orderings of tournaments is np-complete, 2024.
- [AAS22] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Raphael Steiner. Heroes in orientations of chordal graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 36(4):2497–2505, 2022.
- [AB23] Jordan Awan and Olivier Bernardi. Tutte polynomials for regular oriented matroids, 2023.
- [ABH⁺17] Pierre Aboulker, Nick Brettell, Frédéric Havet, Dániel Marx, and Nicolas Trotignon. Coloring graphs with constraints on connectivity. *J. Graph Theory*, 85(4):814–838, 2017.
- [ACN21] Pierre Aboulker, Pierre Charbit, and Reza Naserasr. Extension of Gyárfás-Sumner conjecture to digraphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 2021.
- [AH77] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):429 – 490, 1977.
- [AHH⁺22] Guillaume Aubian, Frédéric Havet, Florian Hörsch, Felix Klingelhofer, Nicolas Nisse, Clément Rambaud, and Quentin Vermande. Problems, proofs, and disproofs on the inversion number, 2022.
- [AHKR21] P. Aboulker, F. Havet, K. Knauer, and C. Rambaud. On the dichromatic number of surfaces. *Accepted to Eurocomb 2021*, 2021.

- [AHW21] Barbara Altenbokum, Winfried Hochstättler, and Johanna Wiehe. The NL-flow polynomial. *Discrete Applied Mathematics*, 296:193–202, 2021.
- [Aub24] Guillaume Aubian. Computing the clique number of tournaments, 2024.
- [BCC⁺13] Eli Berger, Krzysztof Choromanski, Maria Chudnovsky, Jacob Fox, Martin Loebl, Alex Scott, Paul Seymour, and Stéphan Thomassé. Tournaments and colouring. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 103:1–20, 01 2013.
- [BHL18] Julien Bensmail, Ararat Harutyunyan, and Ngoc Khang Le. List coloring digraphs. *Journal of Graph Theory*, 87(4):492–508, April 2018.
- [BJBSS20] J. Bang-Jensen, T. Bellitto, T. Schweser, and M. Stiebitz. Hajós and ore constructions for digraphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 27(1):1–63, 2020.
- [Bro41] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37:194–197, 1941.
- [CAC⁺81] Gregory J. Chaitin, Marc A. Auslander, Ashok K. Chandra, John Cocke, Martin E. Hopkins, and Peter W. Markstein. Register allocation via coloring. *Computer Languages*, 6(1):47–57, 1981.
- [CHMS22] Alvaro Carbonero, Patrick Hompe, Benjamin Moore, and Sophie Spirkl. Digraphs with all induced directed cycles of the same length are not $\vec{\chi}$ -bounded. *Electron. J. Comb.*, 29(4), 2022.
- [CMP⁺22] Linda Cook, Tomáš Masarík, Marcin Pilipczuk, Amadeus Reinald, and Uéverton S. Souza. Proving a directed analogue of the Gyárfás-Sumner conjecture for orientations of P_4 . *CoRR*, abs/2209.06171, 2022.
- [DS86] William H. E. Day and David Sankoff. Computational complexity of inferring phylogenies by compatibility. *Systematic Zoology*, 35(2):224–229, 1986.
- [Erd59] P. Erdős. Graph theory and probability. *Canadian Journal of Mathematics*, 11:34–38, 1959.
- [GM01] Stefanie Gerke and Colin McDiarmid. Channel assignment with large demands. *Annals OR*, 107:143–159, 10 2001.
- [HiK15] Richard Hoshino and Ken ichi Kawarabayashi. The edge density of critical digraphs. *Combinatorica*, 35:619–631, 2015.
- [HM11] A. Harutyunyan and B. Mohar. Strengthened brooks theorem for digraphs of girth three. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 18(1):170–180, 2011.
- [Hoc17] Winfried Hochstättler. A flow theory for the dichromatic number. *European Journal of Combinatorics*, 66:160–167, 2017. Selected papers of EuroComb15.

- [HP98] Ilker Hamzaoglu and Janak H. Patel. Test set compaction algorithms for combinational circuits. In *Proceedings of the 1998 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design*, 1998.
- [KS20] Alexandr Kostochka and Michael Stiebitz. The minimum number of edges in 4-critical digraphs of given order. *Graphs and Combinatorics*, 36, 05 2020.
- [LM16] Zhentao Li and Bojan Mohar. Planar digraphs of digirth four are 2-colorable. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 31, 06 2016.
- [LTN18] Alexey Lvov, Gustavo Tellez, and Gi-Joon Nam. On coloring and colorability analysis of integrated circuits with triple and quadruple patterning techniques. pages 152–159, 03 2018.
- [McD03] C. McDiarmid. *Discrete Mathematics and Radio Channel Assignment*, pages 27–63. Springer New York, New York, NY, 2003.
- [Moh10] B. Mohar. Eigenvalues and colourings of digraphs. *Linear Algebra and its Applications*, 432(9):2273–2277, 2010.
- [NL82] V Neumann-Lara. The dichromatic number of a digraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 33(3):265–270, 1982.
- [NSS23] Tung Nguyen, Alex Scott, and Paul Seymour. Some results and problems on tournament structure, 2023.
- [RPM05] J. Riihijarvi, M. Petrova, and P. Mahonen. Frequency allocation for w lans using graph colouring techniques. In *Second Annual Conference on Wireless On-demand Network Systems and Services*, pages 216–222, 2005.
- [RWC⁺03] Nicholas Rhodes, Peter Willett, Alain Calvet, James B. Dunbar, and Christine Humblet. Clip: Similarity searching of 3d databases using clique detection. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 43(2):443–448, 2003.
- [SS20] Alex Scott and Paul Seymour. A survey of χ -boundedness. *Journal of Graph Theory*, 95, 08 2020.
- [SST22] Thomas Schweser, Michael Stiebitz, and Bjarne Toft. Coloring hypergraphs of low connectivity. *Journal of Combinatorics*, 13:1–21, 01 2022.
- [ST14] Gábor Simonyi and Ágnes Tóth. A generalization of witsenhausen’s zero-error rate for directed graphs. In *2014 IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 2864–2868, 2014.
- [ST16] Michael Stiebitz and Bjarne Toft. A brooks type theorem for the maximum local edge connectivity. *Electronic Journal of Combinatorics*, 25, 03 2016.
- [Ste19] R. Steiner. A note on graphs of dichromatic number 2. *Submitted*, 2019.