

Projet de recherche

Concours CR CNRS 06/02 2024

Guillaume Aubian

Il est recommandé de lire dans un premier temps le rapport sur les travaux antérieurs.

Introduction	1
Nombre dichromatique	2
Cliquicité et tournois	3
Intégration	5

Introduction

Du monde non orienté au monde dirigé. Le nombre dichromatique est une métrique introduite par Neumann-Lara [NL82] qui permet de transposer aux graphes dirigés la coloration de graphes non orientés.

Définition 1 (Neumann-Lara, 1982 [NL82])

Une coloration d'un graphe dirigé est une fonction associant une couleur à chaque sommet de sorte à ce qu'il n'y ait pas de cycle dirigé monochromatique. Le nombre dichromatique d'un graphe dirigé est le nombre minimum de couleurs nécessaires.

Grâce à elle, la communauté a pu traduire dans le monde dirigé de nombreux résultats et conjectures sur les graphes non orientés. Par exemple, un analogue de la célèbre conjecture de Gyárfás-Sumner a été proposé par Aboulker, Charbit et Naserasr [ACN21]. Durant ma thèse, j'ai résolu plusieurs instances de cette conjecture. De façon similaire, la cliquicité¹ d'un graphe dirigé est un analogue dirigé de la cliquicité des graphes non orientés.

Définition 2 (Aboulker, Aubian, Charbit, Lopes, 2023 [AAC23])

Étant donné un ordre total \prec sur ses sommets, le graphe retour d'un graphe dirigé est le graphe de même ensemble de sommets et avec une arête uv pour chaque arc $u \rightarrow v$ tel que $v \prec u$. La cliquicité d'un graphe dirigé est la plus petite cliquicité d'un de ses graphes retour.

Structure des graphes dirigés. Comment une métrique donnée interagit-elle avec la structure d'un objet combinatoire ? Cette question est à la base de nombreuses interrogations en théorie des graphes, notamment dans le but d'obtenir de bonnes bornes

¹En anglais, clique number.

supérieures sur lesdites métriques. Dans le cas non orienté, cette direction de recherche a souvent été féconde. Établir de tels résultats dans le cas dirigé permettrait de mieux appréhender les métriques correspondantes et donc, in fine, les graphes dirigés eux-mêmes.

Aspects algorithmiques. Étudier la structure des graphes dirigés permet aussi de développer des algorithmes efficaces. Ainsi, certains problèmes NP-complets en général deviennent polynomiaux quand on les restreint à certaines classes de graphes ou de graphes dirigés. Par exemple, savoir qu'un graphe est planaire permet de répondre rapidement à des requêtes de plus courts chemins. C'est ce principe qui permet par exemple à OpenStreetMap ou Google Maps de rapidement trouver un chemin quasi-optimal sur des graphes pourtant énormes.

Nombre dichromatique

Structures. Un tournoi est une orientation d'un graphe complet. Dans [BCC⁺13], Berger, Choromanski, Chudnovsky, Fox, Loeb, Scott, Seymour et Thomassé ont caractérisé structurellement les tournois H tels que tout tournoi de nombre dichromatique arbitrairement grand doit contenir H ; de tels tournois sont appelés des héros. Aboulker, Charbit et Naserasr [ACN21] ont conjecturé que pour tout héros et forêt d'étoiles orientée, tout graphe dirigé de nombre dichromatique suffisamment grand contient soit ce héros, soit cette forêt d'étoiles. Si deux contre-exemples minimaux ont déjà été trouvés, il reste la question de caractériser exactement les couples de graphes dirigés satisfaisant cette conjecture. Comme chaque contre-exemple exclut toutes les paires de graphes dirigés les contenant, nous n'avons jamais été aussi proches d'arriver à résoudre cette conjecture, là où la conjecture de Gyárfás-Sumner résiste toujours.

Liens avec les graphes ordonnés. Notre contre-exemple à cette conjecture dans [AAC22] est basée sur une réduction à un problème semblable sur les graphes ordonnés : étant donné un graphe ordonné, les graphes ordonnés ne le contenant pas (en tant que motif ordonné) ont-ils nombre chromatique borné ? Axenovich, Rollin et Ueckerdt [ARU18] se sont intéressés à cette question, encore largement ouverte. Les liens entre les deux conjectures sont encore très obscurs : sont-elles équivalentes ? Peut-on trouver un lien entre la structure des graphes dirigés et celle des graphes ordonnés ?

Peut-être même pourrions-nous contredire la conjecture de Gyárfás-Sumner ainsi, en adaptant aux graphes non orientés les contre-exemples que nous avons trouvés pour cette conjecture, ou pour la variante avec la cliquicité [ACL23] ?

Surfaces. Un autre aspect de l'étude de la structure des graphes dirigés s'intéresse à des considérations topologiques : par exemple, les graphes planaires ont été un objet d'étude central en théorie des graphes ce dernier siècle. Évidemment, ceci est dû au théorème des quatre couleurs, et au fait que les graphes planaires jouent un rôle particulier relativement à la *treewidth*². Mais aussi parce qu'ils apparaissent naturellement

²Ce qui permet de démontrer le fameux théorème de Robertson-Seymour [RS04].

dans plusieurs modélisations : par exemple, les graphes correspondant à des réseaux routiers ou des circuits intégrés sont planaires.

Dans les graphes dirigés, c'est la conjecture de Neumann-Lara qui joue le rôle du théorème des quatre couleurs, et la démontrer est un objectif ambitieux mais pas déraisonnable : on a une intuition, via le cas non orienté, de la machinerie à développer pour y arriver. Dans un premier temps, développer ces outils sera crucial : que ce soit par l'étude des NL-flots, des polynômes NL-flots ou une étude plus approfondie des chaînes de Kempe. Au LABRI se trouvent des experts des graphes planaires : travailler avec eux permettrait à coup sûr d'avancer sur cette conjecture.

Il est aussi important de noter que le théorème des quatre couleurs a nécessité, pour être résolu, de résoudre de nombreux cas par ordinateur³ : ce n'est pas aisé, et d'ailleurs les premières implémentations étaient buggées⁴. Mon profil « codeur » serait ici intéressant.

Applications. La coloration a connu de nombreuses applications, et les graphes dirigés sont un outil très standard pour modéliser divers problèmes : pourtant, les applications de la coloration dirigée sont encore discrètes. Si la définition de Neumann-Lara est la bonne notion, on pourrait s'attendre à voir fleurir de telles applications dans un avenir proche. C'est quelque chose qui me tient à cœur, et j'aimerais participer à leurs découvertes. Une première étape serait de se mettre en contact avec des chercheurs qui appliquent effectivement la coloration à des contextes pratiques, par exemple à des problèmes sur les circuits imprimés ou à des problèmes d'assignation de registres, et de discuter de la bonne modélisation pour que se manifestent les contraintes liées aux cycles monochromatiques.

Cliquicité et tournois

Lien avec les graphes. Plusieurs conjectures fondamentales sur les graphes ont des formulations équivalentes en terme de tournois : mieux comprendre les tournois, c'est donc mieux comprendre les graphes. Comme les tournois sont peu étudiés (relativement aux graphes), cette approche pourrait être fructueuse. Ainsi, Nguyen, Scott et Seymour ont prouvé [NSS23] qu'une fameuse conjecture de Erdős-El Zahar pouvait être vue comme un problème sur les tournois et on peut même trouver une formulation naturelle en terme de cliquicité des tournois : étudier la structure des tournois de grande cliquicité pourrait donc permettre de résoudre cette conjecture.

Erdős-Hajnal. Le théorème de Ramsey dit que tout graphe sur n sommets a cliquicité ou stabilité⁵ au moins $\mathcal{O}(\log(n))$, et une preuve probabiliste classique permet de prouver qu'on ne peut pas espérer mieux qu'une borne logarithmique. Erdős et Hajnal ont néanmoins conjecturé que si on se restreint aux graphes ne contenant pas – en tant que

³C'est même souvent considéré comme la première preuve assistée par ordinateur.

⁴Entre autres, ceci motiva Gonthier et Werner à formaliser la preuve en COQ.

⁵C'est-à-dire un nombre maximum de sommets deux-à-deux non-adjacents.

sous-graphe induit – un graphe fixé, on obtenait une borne polynomiale⁶. Quand Berger, Choromanski, Chudnovsky, Fox, Loeb, Scott, Seymour et Thomassé [BCC⁺13] se sont intéressés à la coloration des tournois et défini les héros, c’est motivé par le résultat suivant d’Alon, Pach et Solymosi [APS01] : la conjecture de Erdős-Hajnal est équivalente à la conjecture suivante.

Conjecture 3 (Alon, Pach, Solymosi, 2001 [APS01])

Pour tout tournoi T , il existe un polynôme P telle que les tournois à n sommets excluant T ont un tournoi transitif de taille au moins $P(n)$.

Récemment, Nguyen, Scott et Seymour [NSS24] ont prouvé que la conjecture de Erdős-Hajnal était vraie sur les graphes de VC-dimension bornée. Là encore, les liens entre tournois et graphes apparaissent car ils ont démontré que cela impliquait la conjecture 3 pour les tournois de nombre dichromatique au plus 2. Je pense que la question de vérifier la conjecture 3 pour les tournois de VC-dimension bornée est tout-à-fait accessible et serait indubitablement une avancée certaine vers la conjecture de Erdős-Hajnal.

Aspect algorithmiques. Les aspects algorithmiques de la cliquicité des graphes dirigés m’ont particulièrement intéressé. Nguyen, Scott et Seymour [NSS23] se sont posés la question de la complexité du calcul de la cliquicité des tournois, et j’ai réussi [Aub24] à prouver que c’est un problème NP-complet. Mieux encore : tester si un tournoi a cliquicité au plus k pour $k \geq 3$ fixé est NP-complet. Seule subsiste alors la question suivante : tester si un tournoi admet un graphe retour sans triangle est-il NP-complet ? Le fait que ce cas soit encore ouvert est une anomalie : pour tous les problèmes similaires, la démarcation entre NP-complet et polynomial est claire. Mais ici, si je penche plutôt pour la NP-complétude, la polynômialité n’est pas à exclure. La question de l’approximabilité est aussi intéressante. Suite à une discussion avec des chercheurs du LIP, nous sommes arrivés à une preuve convaincante du fait que, au moins pour $k = 2$, le problème était approximable en temps polynomial. La question de l’approximabilité reste ouverte pour $k \geq 3$.

$\vec{\chi}$ -bornitude. Dès lors que nous avons défini une notion de cliquicité et de coloration sur les graphes dirigés, on peut parler de $\vec{\chi}$ -bornitude : un ensemble de graphes dirigés est $\vec{\chi}$ -bornée si pour tout entier ω il existe un entier c tel que les graphes dirigés dans cet ensemble qui ont cliquicité ω ont nombre dichromatique au plus c . Dans le cas non orienté, l’étude de la χ -bornitude a été particulièrement féconde, et a des liens forts avec de nombreux pans de la théorie des graphes. Par exemple, Zdeněk Dvořák et Daniel Kral ont prouvé que les graphes de clique-width bornée sont χ -bornés [DK11]. Une des notions les plus importantes de ces dernières années en théorie des graphes et en model-checking est celle de twin-width. Les graphes de twin-width bornée ont clique-width bornée, et donc sont χ -bornés (Bourneuf et Thomassé ont même montré qu’ils sont

⁶Dit autrement, ça voudrait dire que toute classe de graphes stable par suppression d’un sommet et qui n’est pas juste l’ensemble de tous les graphes a une cliquicité ou une stabilité au moins logarithmique : ça concerne l’immense majorité des classes de graphes étudiées en pratique, d’où l’importance de cette conjecture.

polynomialement χ -bornés [BT23]). Dans [AACL23], nous nous sommes intéressés à la question correspondante, encore ouverte :

Conjecture 4 (Aboulker, Aubian, Charbit, Lopes, 2023 [AACL23])

Soit $k \geq 1$. La classe des tournois avec twin-width au plus k est $\vec{\chi}$ -bornée.

Le LIP est à la pointe sur les questions de twin-width et comporte de nombreux experts internationaux sur le sujet, ayant notamment introduit la notion : leur expérience serait ici une aide précieuse. Nous avons aussi adapté d'autres résultats plus classiques sur la χ -bornitude au cas dirigé mais de nombreuses questions, pourtant basiques dans les graphes non orientés, restent ouvertes, notamment :

Conjecture 5 (Aboulker, Aubian, Charbit, Lopes, 2023 [AACL23])

Soit \mathcal{D} une classe de graphes dirigés, et \mathcal{D}^* la clôture par substitution de \mathcal{D} . Si \mathcal{D} est $\vec{\chi}$ -bornée, \mathcal{D}^* aussi.

Nous avons néanmoins réussi à démontrer ce résultat dans les tournois.

Graphes parfaits. Un cas particulier de classe de graphes χ -bornée est la classe des graphes parfaits, c'est-à-dire les graphes dont la cliquicité est exactement égale au nombre chromatique. Il s'agit d'une classe centrale en théorie de graphes non orientés : ainsi, la caractérisation des graphes parfaits [CRST03] par Chudnosky, Robertson, Seymour et Thomas leur a valu le prix Fulkerson en 2009. Ceci motive la question suivante : quels sont les graphes dirigés parfaits ? Ou dans un premier temps : quels sont les tournois parfaits ?

Intégration

Je désirerais intégrer une des trois équipes suivantes :

LAMSADE. Paris-Dauphine, équipe Optimisation, Structure & Algorithmes, dirigée par Laurent Gourvès

J'ai plusieurs fois travaillé avec Ararat Harutyunyan, au sein de l'ANR Digraphs ou de l'ANR DAGDigDec. Il a d'ailleurs démontré plusieurs des résultats fondamentaux sur la coloration des graphes dirigés. Dans cette même équipe, Michaël Lampis est un expert en algorithmique, et a plusieurs fois travaillé sur les aspects algorithmiques du nombre dichromatique. Roland Grappe, Denis Cornaz, Florian Sikora et Cristina Bazgan sont d'autres experts en théorie des graphes avec qui je pourrais collaborer. Eunjung Kim, une chargée de recherche CNRS au sein de l'équipe qui avait un profil plus théorique, a quitté la France : je pourrais la remplacer sur des thématiques proches.

LABRI. Bordeaux, équipe CombAlgo, dirigée par Marthe Bonamy

Ayant été dans mon jury de thèse, Marthe Bonamy connaît déjà mon travail. De plus, c'est une experte sur les questions de graphes planaires, et nous pourrions donc plus facilement collaborer sur des questions relatives à la conjecture de Neumann-Lara. Dans

cette même équipe se trouvent François Dross, qui a déjà travaillé sur des questions algorithmiques dans les tournois, et Frantisek Kardos, avec lequel je travaille en ce moment. Enfin, Éric Sopena, un expert en graphes orientés, part à la retraite : je pourrais donc le remplacer sur des thématiques proches.

LIP. Lyon, équipe MC2, dirigée par Stéphane Thomassé

J'ai souvent rencontré les membres de cette équipe lors de conférences et workshops, notamment organisés par l'ANR Digraphs. Je connais particulièrement Stéphane Thomassé : il a déjà travaillé sur le nombre dichromatique, et j'ai eu l'occasion d'écrire un article avec lui sur ce domaine, mais aussi sur la cliquicité des tournois. L'expertise de Nicolas Trotignon sur les questions de structure de graphe, de graphes parfaits et de χ -bornitude pourrait aussi inspirer des questions intéressantes dans le cas dirigé. Enfin, le LIP contient de nombreux experts sur la twin-width : je pourrais donc collaborer avec les personnes précédemment citées, mais aussi avec Édouard Bonnet ou Rémi Watrigant, sur les questions de twin-width des tournois. Ils ont d'ailleurs récemment soumis une ANR « graphes ordonnés » dans laquelle mon projet s'inscrit parfaitement.

Références

- [AAC22] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Pierre Charbit. Heroes in oriented complete multipartite graphs. *accepted in Journal of Graph Theory*, 2022.
- [AAC23] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Pierre Charbit. Digraph colouring and arc-connectivity. *submitted on arXiv*, 2023.
- [AACL23] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, Pierre Charbit, and Raul Lopes. Clique number of tournaments. *submitted on arXiv*, 2023.
- [ACN21] Pierre Aboulker, Pierre Charbit, and Reza Naserasr. Extension of Gyárfás-Sumner conjecture to digraphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 28(2), May 2021.
- [APS01] Noga Alon, János Pach, and József Solymosi. Ramsey-type theorems with forbidden subgraphs. *Combinatorica*, 21(2):155–170, Apr 2001.
- [ARU18] Maria Axenovich, Jonathan Rollin, and Torsten Ueckerdt. Chromatic number of ordered graphs with forbidden ordered subgraphs. *Comb.*, 38(5):1021–1043, 2018.
- [Aub24] Guillaume Aubian. Computing the clique number of tournaments. *submitted on arXiv*, 2024.
- [BCC⁺13] Eli Berger, Krzysztof Choromanski, Maria Chudnovsky, Jacob Fox, Martin Loeb, Alex Scott, Paul Seymour, and Stéphane Thomassé. Tournaments and colouring. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 103:1–20, 01 2013.

- [BT23] Romain Bourneuf and Stéphan Thomassé. Bounded twin-width graphs are polynomially χ -bounded, 03 2023.
- [CRST03] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *Annals of mathematics, ISSN 0003-486X, Vol. 164, N^o 1, 2006, pags. 51-229, 164, 01 2003.*
- [DK11] Zdenek Dvorak and Daniel Kral. Classes of graphs with small rank decompositions are χ -bounded. *European Journal of Combinatorics, 33, 07 2011.*
- [NL82] V Neumann-Lara. The dichromatic number of a digraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B, 33(3):265–270, 1982.*
- [NSS23] Tung Nguyen, Alex Scott, and Paul Seymour. Some results and problems on tournament structure, 2023.
- [NSS24] Tung Nguyen, Alex Scott, and Paul Seymour. Induced subgraph density. vi. bounded vc-dimension, 2024.
- [RS04] Neil Robertson and P.D. Seymour. Graph minors. xx. wagner’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B, 92(2):325–357, 2004.* Special Issue Dedicated to Professor W.T. Tutte.