

# Liste de productions choisies

Concours CR CNRS 06/02 2024

Guillaume Aubian

Nombre dichromatique	1
Cliquicité	3
Miscellanées	4

Étant donné un graphe dirigé  $D$ , on note  $\vec{\chi}(D)$  son nombre dichromatique et  $\vec{\omega}(D)$  sa cliquicité.

## *Nombre dichromatique*

### **Digraph Colouring and Arc-Connectivity**

*avec Pierre Aboulker et Pierre Charbit.*

[AAC23]

Soit  $\lambda(D)$  le nombre maximum de chemins arc-disjoints entre deux sommets distincts de  $D$ . Neumann-Lara a prouvé que  $\vec{\chi}(D) \leq \lambda(D) + 1$ . Dans cet article, nous caractérisons les graphes dirigés  $D$  tels que  $\vec{\chi}(D) = \lambda(D) + 1$ , dits extrémaux. Ceci généralise un résultat analogue pour les graphes non orientés prouvé par Stiebitz et Toft ainsi que la version dirigée du théorème de Brooks prouvée par Harutyunyan et Mohar. En cours de route, nous introduisons une généralisation des Hajós joins qui donne une nouvelle façon de construire des familles de graphes dirigés avec des propriétés intéressantes.

Ce résultat est intéressant car il s'agit d'un exemple de contrainte structurelle non-locale, contrairement aux articles suivants, qui implique tout de même une borne sur le nombre dichromatique. De plus, les cas extrémaux admettent une décomposition élégante. Enfin, prouver reconnaître les cas extrémaux en temps polynomial nécessite quelques astuces algorithmiques et une analyse de complexité fine.

## Decomposing and colouring some locally semicomplete digraphs

*avec Pierre Aboulker et Pierre Charbit,  
publié dans le European Journal of Combinatorics.  
[AAC22a]*

Un graphe dirigé est semi-complet si deux sommets quelconques sont reliés par au moins un arc et est localement semi-complet si le voisinage entrant et le voisinage sortant de tout sommet induisent un graphe dirigé semi-complet. Dans cet article, nous étudions plusieurs sous-classes de graphes dirigés localement semi-complets pour lesquelles nous donnons des théorèmes de décomposition structurelle. En conséquence, nous obtenons plusieurs applications, dont une réponse à une conjecture de Aboulker, Charbit et Naserasr : si un graphe orienté est tel que le voisinage extérieur de chaque sommet induit un tournoi transitif, alors son nombre dichromatique est au plus de 2.

Cet article illustre parfaitement le fait que les classes de graphes dirigés étudiées par la conjecture de Aboulker-Charbit-Naserasr correspondent à des classes de graphes dirigés naturelles, ici les graphes dirigés localement semi-complets. Nous obtenons d'abord une caractérisation de telles classes de graphes dirigés via des arguments géométriques pour arriver à nos fins, mais la caractérisation est déjà intéressante en soi : par exemple, elle permet ici de résoudre un cas particulier de la conjecture Caccetta-Häggkvist.

## Heroes in oriented complete multipartite graphs

*avec Pierre Aboulker et Pierre Charbit,  
accepté dans le Journal of Graph Theory.  
[AAC22b]*

Étant donnée une classe de graphes dirigés  $\mathcal{C}$ , un graphe dirigé  $H$  est un héros dans  $\mathcal{C}$  si les graphes dirigés dans  $\mathcal{C}$  ne contenant pas  $H$  ont un nombre dichromatique borné. Dans un article séminal, Berger, Choromanski, Chudnovsky, Fox, Loeb, Scott, Seymour et Thomassé ont caractériser simplement les héros dans les tournois. Dans cet article, nous donnons une preuve simple que les héros dans les graphes orientés quasi-transitifs sont les mêmes que les héros dans les tournois. Nous caractérisons aussi les héros dans les orientations de graphe multipartis complets, réfutant ainsi une conjecture d'Aboulker, Charbit et Naserasr.

Ici encore, la conjecture de Aboulker-Charbit-Naserasr nous amène à considérer des classes de graphes dirigés naturelles : les graphes dirigés quasi-transitifs et les orientations de graphes multipartis complets. Dans le premier cas, une astuce nous permet d'obtenir une caractérisation exacte des héros, mais le deuxième cas est plus surprenant : grâce à une réduction à un problème sur les graphes ordonnés, nous arrivons à contredire la conjecture de Aboulker, Charbit et Naserasr. Via deux preuves particulièrement techniques, nous arrivons tout de même à caractériser les héros dans les orientations de graphes multipartis complets.

## Cliquicité

### Clique number of tournaments

*avec Pierre Aboulker, Pierre Charbit, et Raul Lopes.*  
[AACL23]

Dans ce papier, nous avons introduit la notion de cliquicité d'un tournoi et étudié sa relation avec le nombre dichromatique. En particulier, cette notion permet de définir des classes de tournois  $\vec{\chi}$ -bounded, dont nous avons prouvé plusieurs propriétés. En particulier, nous avons démontré que les classes de tournois  $\vec{\chi}$ -bornées sont stables par substitution et nous sommes intéressés aux liens entre  $\vec{\chi}$ -bornitude et twin-width.

Cet article est crucial, en ceci qu'il définit la cliquicité mais aussi parce qu'il montre comment, si les résultats sur les graphes semblent s'adapter aux tournois, ils sont souvent bien plus facile à obtenir : par exemple, montrer que les graphes complets ont grande cliquicité est trivial, et montrer que les classes  $\chi$ -bornées sont stables par substitution est assez facile. Pourtant les résultats correspondants sur les tournois prennent plusieurs pages.

### Computing the clique number of tournaments

[Aub24]

J'ai étudié la complexité temporelle du calcul de la cliquicité d'un tournoi et prouvé que, pour tout  $k \geq 3$  fixé, décider si un tournoi a cliquicité au plus  $k$  est NP-complet. Ceci répond à une interrogation de Nguyen, Scott et Seymour. Pour ce faire, j'ai utilisé une construction que j'ai pu ensuite modifier pour fournir un contre-exemple à une conjecture d'Aboulker, Aubian, Charbit et Lopes.

J'ai désiré mettre cet article en avant car il illustre comment une approche informatique peut aider à résoudre certains problèmes combinatoires. Ici, pour prouver que certains gadgets dans la preuve de NP-complétude ont les propriétés désirées, un programme peut se contenter d'essayer les  $10!$  ordres possibles sur les sommets de ce gadget : une seconde pour un ordinateur, impossible pour un humain. Trouver de tels gadgets a d'ailleurs dans un premier temps nécessité un code optimisé de presque 600 lignes, et plusieurs heures de calculs.

## Miscellanées

### Vizing's and Shannon's Theorems for defective edge colouring

*avec Pierre Aboulker et Chien-Chung Huang,  
publié dans le Electronic Journal of Combinatorics.*

[AAH22]

Un multigraphe  $G$  est dit  $(k, d)$ -arête-colorable si son ensemble d'arêtes peut être partitionné en  $k$  sous-graphes de degré maximal au plus  $d$  et notons  $\chi'_d(G)$  le plus petit  $k$  tel que  $G$  est  $(k, d)$ -arête-colorable. Nous prouvons que pour tout entier  $d$ , tout multigraphe  $G$  de degré maximal vérifie  $\chi'_d(G) = \lceil \frac{\Delta}{d} \rceil$  si  $d$  est pair et  $\chi'_d(G) \leq \lceil \frac{3\Delta-1}{3d-1} \rceil$  sinon, et que certains multigraphes atteignent ces bornes. Nous prouvons également que pour tout graphe simple  $G$ ,  $\chi'_d(G) \in \{\lceil \frac{\Delta}{d} \rceil, \lceil \frac{\Delta+1}{d} \rceil\}$  et caractérisons les valeurs de  $d$  et  $\Delta$  pour lesquelles il est NP-complet de calculer  $\chi'_d(G)$ . Ces résultats généralisent plusieurs résultats classiques sur l'indice chromatique d'un graphe obtenus par Shannon, Vizing, Holyer, Leven et Galil.

J'ai désiré mettre cet article en avant, car il présente un autre aspect de la coloration : l'arête-coloration. Pour résoudre ce problème, j'ai dû me plonger dans la théorie des facteurs. Après avoir démontré les bornes désirées, nous avons caractérisé les cas où calculer  $\chi'_d$  est NP-complet ou polynomial.

### Problems, proofs, and disproofs on the inversion number

*avec Frédéric Havet, Florian Hörsch,  
Félix Klingelhofer, Nicolas Nisse,  
Clément Rambaud et Quentin Vermande.*

[AHH<sup>+</sup>22]

Étant donné un ensemble de sommets  $X$ , une inversion consiste à inverser les directions de tous les arcs dont les deux extrémités sont dans  $X$ . Le nombre d'inversions de  $D$ , noté  $\text{inv}(D)$ , est le nombre minimum d'inversions nécessaires pour rendre  $D$  acyclique. Dans cet article, nous étudions un certain nombre de problèmes concernant le nombre d'inversions des graphes orientés. Entre autres, nous réfutons une conjecture de Bang-Jensen et al. affirmant que, pour toute paire de graphes orientés  $L$  et  $R$ , nous avons  $\text{inv}(L \Rightarrow R) = \text{inv}(L) + \text{inv}(R)$ , où  $L \Rightarrow R$  est obtenu à partir de  $L$  et  $R$  en ajoutant tous les arcs de  $L$  vers  $R$ .

Ici, ma contribution à cet article correspond à la section 3, et a surtout consisté à réfuter la conjecture de Bang-Jensen et al. Pour ce faire, je me suis aidé d'un MIP-solver et une nuit de calculs a fait apparaître un contre-exemple à cette conjecture. Une fois le contre-exemple trouvé, j'ai pu trouver a posteriori une preuve sans ordinateur, à base d'algèbre linéaire.

## Références

- [AAC22a] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Pierre Charbit. Decomposing and colouring some locally semicomplete digraphs. *Eur. J. Comb.*, 106:103591, 2022.
- [AAC22b] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Pierre Charbit. Heroes in oriented complete multipartite graphs. *accepted in Journal of Graph Theory*, 2022.
- [AAC23] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Pierre Charbit. Digraph colouring and arc-connectivity. *submitted on arXiv*, 2023.
- [AACL23] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, Pierre Charbit, and Raul Lopes. Clique number of tournaments. *submitted on arXiv*, 2023.
- [AAH22] Pierre Aboulker, Guillaume Aubian, and Chien-Chung Huang. Vizing's and shannon's theorems for defective edge colouring. *Electron. J. Comb.*, 29(4), 2022.
- [AHH<sup>+</sup>22] Guillaume Aubian, Frédéric Havet, Florian Hörsch, Felix Klingelhofer, Nicolas Nisse, Clément Rambaud, and Quentin Vermande. Problems, proofs, and disproofs on the inversion number, 2022.
- [Aub24] Guillaume Aubian. Computing the clique number of tournaments. *submitted on arXiv*, 2024.